積分方程及其應用

С. Г. 米哈林著
陳傳璋
盧鶴紱 譯

商務印書館

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的米哈林(С. Г. Михлин)著"積分方程及其應用"(Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники) 1949 年版譯出。原書爲"工程師物理數學叢書"之一。

本書由上海復旦大學陳傳璋、盧鶴紱兩同志合譯。

積分方程及其應用

米哈林著

陳傳璋　盧鶴紱譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號
〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕
新華書店總經售
商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號
(52801)

開本 850×1168 1/32　印張 10 12/16　字數 268,000
1955 年 8 月初版　印數 1—1,800　定價(8) ¥1.60

目　錄

上篇　積分方程的解法

下篇 積分方程的應用

再版序言

第二版與第一版顯著的不同處，主要是在上篇(第一版的第一章)。在第二版中，我放棄了對積分方程的簡略式的敍述，而充分詳細的引入了必要的證明。無論在應用方面或者在理論本身的需要，都迫使我離開假設核是連續的這一傳統。我用核的平方的單積分的有界性這一假設來代替它；在這樣假設之下，逐次迫近級數和希爾伯脫-施密特級數的一致收斂性保持有效。在我所作的假設下，嚴格的理論基礎要以利用勒白格積分的概念作前提。不熟悉勒白格積分理論的讀者，應當把所必須的積分的存在性，簡單地說為公理。

在關於應用的下篇(第一版的第二章)中，添加了若干新的小節；其中的二個是有關於三維的問題的。其餘的改變可歸之於：照例地在沒有證明的地方或僅僅提到過的地方，都給以充分詳細的證明。

第一版中印刷上的錯誤與若干缺點，在第二版中已改正了。計算也經過校驗，在必要的場合也有所修正。

Г. М. 戈魯淨教授與 Л. В. 卡托洛維奇教授向我指出第一版中的若干缺點。A. A. 達洛特尼青教授在書報評論中指出若干術語上的缺點。研究生 И. A. 依茨可維奇指出許多印刷上的錯誤。向他們表示我衷心的謝意。

C. 米哈林

列寧格勒 1948 年 5 月

初版序言

在最近二三十年中出現了許多著作,在其中,用積分方程的方法來解決一些理論上與在應用中的重要問題。

例如,只要指出在彈性靜力學理論方面,及流體動力學的流線問題方面的工作,已經足夠說明這一點。積分方程的方法在振動的理論中,在壓縮桿的剛性的問題中,以及在其他許多問題中所起的重大作用,也是人所共知的。

據我看來,把在所說的時間內,在雜誌的文獻上積累起來的在積分方程應用方面的一般材料加以系統化的必要性已經成熟。本書也就是這樣系統化的嘗試。

本書由份量並不相同的兩章所構成。第一章包括積分方程理論的基本事實與其解的逐次迫近法。在這一章中,含有積分主值的奇性積分方程理論佔有特殊的位置。這一理論已充分完善地被製訂起來,它有着極豐富的應用,但到現在爲止,在積分方程的教程中還沒有它的位置。我認爲有必要在這裏對於這個理論的基本元素作一簡述。

第一章以其不少的部分來包含通常在積分方程教程中所敍述的材料,照例地,在這樣場合,我僅僅敍述結果,而介紹讀者到相應的教程中找尋證明。

在每一有可能性的地方,理論的結果常用數字的例子來闡明。

在篇幅上大大超過前章的第二章是關於應用方面的。在目錄中,已清楚地列舉了在第二章中所解決的問題。這裏指出:我是主要地注意於彈性體的問題與流體動力學的問題。這不僅是由於作者個人的愛好,而且是因爲積分方程在這兩個領域中的應用也最多。再者,我主要地限於討論直線與平面上的問題。人們有時也不是沒有一定根據地以

其效果的不夠來非難積分方程的方法。對於三維的問題，這個責難是特別有效的。爲了希望把所討論的範圍限於可能求出有效解答的情況，我不得不放棄對空間問題的討論。

對於每一缺點的指出，我將非常感謝。

C. 米哈林

列寧格勒 1944 年 7 月

上篇　積分方程的解法

第一章　弗列德和蒙型的方程

§1. 積分方程的分類　在很多的力學、數學物理和機械學的問題中，引出來下面形式的方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds=f(x), \tag{1}$$

其中 $\varphi(x)$ 是未知函數。因未知函數含在積分號的下面，這方程叫做**積分方程**。

我們暫不引出這些問題，因其中大部分問題，將在下篇中加以分析，我們從直接研究方程本身開始。

在積分方程（1）中各已知元素，我們給以下面的名稱：函數 $f(x)$ 叫做自由項或右端，函數 $K(x, s)$ 叫做核，常數因子 λ 叫做方程的參數。參數的引出不一定必要；因爲可用 $K_1(x, s)$ 表示乘積 $\lambda K(x, s)$，且視 $K_1(x, s)$ 爲一新核，則恆可能使 $\lambda=1$。但在積分方程的研究中，引用這樣參數是很有益的。

積分的上下限 a 和 b，將看作兩個有限常數。

應注意的，方程中的參數 λ 和函數 $\varphi(x)$，$K(x, s)$，$f(x)$ 等可當作實數，也可當作複數。

積分方程的特徵，實質上，由它的核決定之。在應用上所常見的核是連續函數，但也有不是連續的。我們將討論下面三種類型的積分方程：

1. 若當 $a \leqslant x \leqslant b$ 及 $a \leqslant s \leqslant b$ 時，核 $K(x, s)$是連續函數；或至少是使下面的重積分

$$\int_a^b \int_a^b |K^2(x, s)| dx\, ds$$

是一有限值的不連續函數，則方程（1）叫做弗列德和蒙型方程。

2. 若核是下形式

$$K(x, s) = \frac{H(x, s)}{|x-s|^\alpha},$$

其中 $H(x, s)$是有界函數；而 α 是一常數，且適合下不等式：

$$0 < \alpha < 1,$$

則方程（1）叫做弱奇性方程。

3. 核為下形式

$$K(x, s) = \frac{A(x, s)}{x-s}$$

的方程是第三類型的積分方程，其中分子 $A(x, s)$對於 x 和 s 的偏微商皆存在❶。在這樣情況，方程（1）中所引用的積分

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = \int_a^b \frac{A(x, s)}{x-s}\varphi(s)ds$$

是發散的。但關於 $\varphi(x)$ 可取一更廣泛的假設，即它可使上面的積分的主值存在，也就是下極限

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{x-\varepsilon} K(x, s)\varphi(s)ds + \int_{x+\varepsilon}^b K(x, s)\varphi(s)ds\right)$$

存在。

現在若方程（1）中的積分在主值存在的意義下是發散的❷，則我們就有了第三類型的積分方程，叫做奇性方程。

我們舉出幾個例子。

(a) 方程

---

❶ 這個假設可能用較弱條件代之。

❷ 積分主值的概念，在第三章 §§21 和 22 中，有詳細說明。

$$\varphi(x)-\int_0^1 (x^2+s^2)\varphi(s)ds=x^2$$

是弗列德和蒙型的。因爲它的核 $K(x,s)=x^2+s^2$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant s\leqslant 1$ 內是連續的。在這個方程中，$\lambda=1$, $f(x)=x^2$。

(б) 方程

$$\varphi(x)-\int_0^l \ln|x-s|\varphi(s)ds=f(x)$$

也是弗列德和蒙型的。因爲它的核雖然在 $x=s$ 處是不連續的，但重積分

$$\int_0^l\int_0^l \ln^2|x-s|\,dx\,ds$$

是一有限值。

(в) 考慮下方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha}ds=f(x),\quad 0<\alpha<1。\qquad (甲)$$

我們設 $f(x)$ 確定在區間 $0\leqslant x\leqslant a$ 上且爲連續，則這方程在所論區間內有意義。這方程也可看作一般形式(1)，雖然它不能像上面的兩個例子那樣明顯。爲了說明方程(甲)確具有(1)的形式，我們令

$$K(x,s)=\begin{cases}(x-s)^{-\alpha}, & 當\ s<x\ 時,\\ 0, & 當\ s\geqslant x\ 時;\end{cases}$$

則方程(甲)可寫爲(1)的形式：

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^a K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)。$$

若 $0<\alpha<\frac{1}{2}$，則方程(甲)是弱奇性方程，同時也是弗列德和蒙型的；因爲重積分

$$\int_0^a\int_0^a K^2(x,s)dx\,ds=\int_0^a dx\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{2\alpha}}=\frac{a^{2-2\alpha}}{(1-2\alpha)(2-2\alpha)}$$

是一有限值。

(г) 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\cot\frac{s-x}{2}\varphi(s)ds=f(x)$$

在積分的主值存在的意義下,這方程是奇性的;因爲它的核可表如下形式:

$$\frac{1}{x-s}(x-s)\cot\frac{s-x}{2},$$

而函數

$$(x-s)\cot\frac{s-x}{2}$$

在區間 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上是連續的且有微商。

關於我們的分類,必須注意下述事實。首先,這樣分類是不完備的,可能有很多的積分方程不屬於上述三種類型。我們所以僅限於這三類型,是因爲它們對於應用特別重要。其次,弗列德和蒙型方程和弱奇性方程兩者的區別不甚重要;除某些例外,很多重要結論對於這兩類型的方程是相同的。

在很多場合中,所討論的積分方程的未知函數,不確定在 X 軸上的一個線段上,而是確定在一條曲線弧上,這曲線爲平面的或空間的;或確定在二維或三維的區域內。在前一情況,沒有什麼新意義,只要引用曲線弧的長或其它參數作爲自變量,而此參數將點的位置確定在曲線上,則我們得到前已討論的各種類型的方程。

若未知函數確定在 n 維區域 Ω 內(這情況對於應用很有益,平常 n 等於 2 或 3,一般地 n 爲任意的正整數),於是我們有下面的方程來代替(1)

$$\varphi(M)-\lambda\int_\Omega K(M,M_1)\varphi(M_1)dM_1=f(M), \tag{2}$$

其中 M 和 M_1 是 Ω 內的兩點,而 dM_1 是區域的元素。如前所論,我們稱 λ 爲參數,函數 $K(M,M_1)$ 爲核及 $f(M)$ 爲積分方程(2)的右端。類型(2)的方程的分類,我們將如下處理之。

若積分

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}|K^2(M,\ M_1)|\,dM\,dM_1$$

是一有限值，則稱(2)是弗列德和蒙型方程。在特殊情況，若核是連續或有界函數，方程(2)是弗列德和蒙型的。

用 r 表示兩點 M 及 M_1 間的距離，若核有形式

$$K(M,M_1)=\frac{H(M,\ M_1)}{r^{\alpha}},$$

其中 $H(M,M_1)$爲有界函數，且 α 限在 $0<\alpha<n$ 內，則方程(2)是弱奇性型的。

對於多個變量的積分方程，也可能給以奇性型的定義；不過我們將不這樣作，因爲這樣方程對於應用是很少有用的。

若方程的右端恆等於零，則叫做齊次積分方程。因此，齊次方程有下形式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0, \qquad (3)$$

或對應的形式

$$\varphi(M)-\lambda\int_{\Omega}K(M,\ M_1)\varphi(M_1)dM_1=0。 \qquad (4)$$

若右端不恆等於零，則叫做非齊次方程。

關於弗列德和蒙型方程的理論上和應用上的解法，對於一個及多個變量的情況是完全一致的。因之我們在下幾節中，將僅討論一個自變量的方程。我們很容易將所得結果運用到多個自變量的情況。

方程的形式如(1)及(2)的，叫做第二種積分方程。爲區別起見，稱下形式的方程

$$\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (5)$$

或多個自變量的方程

$$\int_{\Omega}K(M,M_1)\varphi(M_1)dM_1=f(M) \qquad (6)$$

爲第一種積分方程。

§2. 逐次迫近法、解核概念 我們開始研究積分方程的解。在本章中 §§2—9，我們僅討論弗列德和蒙型方程。

對於這樣方程的核，我們將加以如下限制：核的平方的絕對值對於積分變量的單積分是一有界函數：

$$\int_a^b |K^2(x,s)|\,ds<C_1,\ C_1=\text{常數}。\tag{1}$$

至於自由項，我們可設其平方的絕對值的積分是有限的：

$$\int_a^b |f^2(x)|\,dx<\infty。\tag{1_1}$$

我們將用逐次迫近法以求積分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds=f(x)\tag{2}$$

的解。為達到這個目的，我們將方程（2）寫如下形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds。\tag{3}$$

我們取方程的自由項為零次近似解：

$$\varphi_0(x)=f(x)。$$

將這個解代入方程（3）的右邊，再取所得結果為一次近似解：

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)\,ds。$$

再將這個一次近似解代入方程（3）的右邊，依此類推。一般地，若已得 n 次近似解 $\varphi_n(x)$，則將此解代入方程（3）的右邊，而取所得結果為 $(n+1)$ 次近似解。於是逐次迫近法，由下面的遞推關係來確定

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)\,ds。\tag{4}$$

若逐次迫近法所得的一列近似解一致收斂於一極限，則這個極限就是方程（3）的解。若極限不存在，則應用逐次迫近法顯然無意義。

我們詳細研究近似解的組成形式。很明顯地，

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)\,ds。$$

其次,

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_1(s)ds=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^b K(x,t)dt\int_a^b K(t,s)f(s)ds。$$

在第二個積分中變換其積分的次序。爲簡略起見,引用下記號

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)dt, \tag{5}$$

則得到:

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^b K_2(x,s)f(s)ds。$$

完全相同的情況,我們得:

$$\varphi_3(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)f(s)ds+\lambda^2\int_a^b K_2(x,s)f(s)ds+$$

$$+\lambda^3\int_a^b K_3(x,s)f(s)ds,$$

其中

$$K_3(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_2(t,s)dt, \tag{6}$$

且一般地,有

$$\varphi_n(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{n}\lambda^m\int_a^b K_m(x,s)f(s)ds; \tag{7}$$

$K_m(x,s)$由下面遞推關係確定

$$K_1(x,s)=K(x,s);\quad K_m(x,s)=\int_a^b K(x,t)K_{m-1}(t,s)dt。 \tag{8}$$

函數 $K_m(x,s)$叫做關於已知核 $K(x,s)$的 m 次疊核。很易證明這個疊核能適合較(8)更爲廣泛的下關係:

$$K_m(x,s)=\int_a^b K_r(x,t)K_{m-r}(t,s)dt, \tag{9}$$

其中 r 爲小於 m 的任意自然數。

事實上,我們用 K_{m-2} 來表示(8)中的核 $K_{m-1}(t,s)$,再代入同一

式(8)中,我們有

$$K_m(x,s)=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)K_{m-2}(t_2,s)dt_1dt_2。$$

核 $K_{m-2}(t_2,s)$ 也可能用 K_{m-3} 表之,依此類推。繼續這樣運算至有限次後,我們得到下面的表達式

$$K_m(x,s)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{m-1},s)dt_1dt_2\cdots \cdots dt_{m-1}。\tag{甲}$$

在上式中,我們把對於 t_r 的積分提出,則變爲下形式

$$K_m(x,s)=\int_a^b dt_r\left\{\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{r-1},t_r)dt_1\cdots dt_{r-1}\times \times\int_a^b\cdots\int_a^b K(t_r,t_{r+1})K(t_{r+1},t_{r+2})\cdots K(t_{m-1},s)dt_{r+1}\cdots dt_{m-1}\right\}。$$

由公式(甲),大括弧內第一個因子的多重積分等於 $K_r(x,t_r)$,而第二個因子的多重積分則爲 $K_{m-r}(t_r,s)$。於是有

$$K_m(x,s)=\int_a^b K_r(x,t_r)K_{m-r}(t_r,s)dt_r。$$

此處將 t_r 代爲 t,我們得到(9)式。

設近似解是收斂的,亦卽(7)中的函數趨於一極限,則我們得到積分方程(2)的解,這個解是一無窮級數形式

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\int_a^b K_m(x,s)f(s)ds,\tag{10}$$

其中前 n 項的和等於 $\varphi_n(x)$。

我們闡述近似解所構成敍列的收斂性。用 C_m 表示積分

$$\int_a^b|K_m(x,s)|^2ds$$

的上界,且對於 C_m 的値作一估計。在(9)式中,令 $r=m-1$,則

$$K_m(x,s)=\int_a^b K_{m-1}(x,t)K(t,s)dt。\tag{8_1}$$

對於這個積分,我們應用布里亞柯夫斯基-施瓦而茨不等式:

$$|K_m(x,s)|^2 \leqslant \int_a^b |K_{m-1}(x,t)|^2 dt \int_a^b |K(t,s)|^2 dt。$$

再將此不等式對於 s 取積分，我們有：

$$\int_a^b |K_m(x,s)|^2 ds \leqslant B^2 \int_a^b |K_{m-1}(x,t)|^2 dt \leqslant B^2 C_{m-1}。$$

取左端積分的上界，則有

$$C_m \leqslant B^2 C_{m-1}。$$

從這個遞推不等式，立卽得到需要的估計：

$$C_m \leqslant B^{2m-2} C_1。\tag{11}$$

我們引用在討論中將需要的一個值

$$D = \sqrt{\int_a^b |f^2(s)| ds}。$$

對於無窮級數(10)的普通項，我們應用布里亞柯夫斯基–施瓦而茨不等式：

$$\left|\int_a^b K_m(x,s) f(s) ds\right|^2 \leqslant \int_a^b |K_m^2(x,s)| ds \int_a^b |f(s)|^2 ds \leqslant C_1 D^2 B^{2m-2}。$$

因之，無窮級數(10)的普通項小於

$$D\sqrt{C_1}|\lambda|^m B^{m-1},$$

於是級數(10)與以 $|\lambda|B$ 爲公比的級數作比較，前者收斂較快。

從上所述，若 $|\lambda| < B^{-1}$，顯示出方程(2)的可解性。現在我們證明對於適合這個不等式的任意值 λ，方程僅有一個解。假如不是這樣，且設 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是方程(2)的兩個解。則

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_1(s) ds = f(x),$$

$$\varphi_2(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_2(s) ds = f(x)。$$

將這兩式相減，且令 $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \omega(x)$，則得

$$\omega(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\omega(s) ds。$$

應用布里亞柯夫斯基–施瓦而茨不等式：

$$|\omega^2(x)| \leqslant |\lambda|^2 \int_a^b |K^2(x,s)| ds \int_a^b |\omega^2(s)| ds; \tag{12}$$

將這個不等式對於 x 取積分,我們得

$$\int_a^b |\omega^2(x)| dx \leqslant |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K^2(x,s)| dx\, ds \int_a^b |\omega^2(s)| ds,$$

或
$$(1-|\lambda|^2 B^2) \int_a^b |\omega^2(s)| ds \leqslant 0。$$

右邊第一個因子必為正值,且第二個因子不為負,故必須

$$\int_a^b |\omega^2(s)| ds = 0。$$

今從(12)式,有 $|\omega^2(x)| \leqslant 0$, 因之 $\omega(x) \equiv 0$, 或 $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$。於是方程(2)有唯一解。

從我們的討論,得到下定理

定理 若

$$\int_a^b |K^2(x,s)| ds \leqslant C_1; \quad C_1 = 常數,$$

則對於下圓

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{B}; \quad B^2 = \int_a^b \int_a^b |K^2(x,s)| dx\, ds$$

內的一切值 λ, 近似解敍列是一致收斂的。這敍列的極限是方程(2)的解,且這個解是唯一的。

若在級數(10)中取有限個項,至 λ 的 n 次乘冪為止,很容易看到所產生的誤差不超過下值

$$D\sqrt{C_1}\frac{|\lambda|^{n+1}B^n}{1-|\lambda|B}。 \tag{13}$$

我們討論下方程作為例子

$$\varphi(x) - 0.1\int_0^1 K(x,s)\varphi(s) ds = 1; \quad K(x,s) = \begin{cases} x\ (0 \leqslant x \leqslant s), \\ s\ (s \leqslant x \leqslant 1)。\end{cases}$$

此處 $\lambda = 0.1$, $B = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $C_1 = \frac{1}{3}$, 因之近似解敍列是一致收斂的。

其次，顯然 $D=1$。我們求近似解，且限於二近似解爲止。於是在級數(10)內保留前三項，則發生的誤差不大於

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{(0.1)^3\times\frac{1}{6}}{1-\frac{0.1}{\sqrt{6}}}\approx 0.0001。$$

我們有：

$$\varphi_0(x)=1,$$

$$\varphi_1(x)=1+\frac{x}{10}-\frac{x^2}{20},$$

$$\varphi_2(x)=1+\frac{131}{3000}x-\frac{101}{200}x^2-\frac{x^3}{6000}+\frac{x^4}{24000}。$$

若設近似解 $\varphi(x)=\varphi_2(x)$，則發生小於 0.0001 的誤差，我們將有

$$\varphi(x)=1+\frac{131}{3000}x-\frac{101}{200}x^2-\frac{x^3}{6000}+\frac{x^4}{24000}。$$

設核是一個有界函數，也就是有這樣常數 A 存在，對於一切值 x 和 s，有

$$|K(x,s)|<A。$$

於是不難推知對於在 λ 的複平面上且在下圓

$$|\lambda|<\frac{1}{A(b-a)}$$

內的一切值 λ，近似解敍列是一致收斂的。

若積分(1)不是有界的，但下面的二重積分

$$\int_a^b\int_a^b|K^2(x,s)|\,dx\,ds$$

是一有限值，則在尋常意義下，近似解敍列雖然可能是發散的，但在某種廣泛意義下它可以是收斂的（如 §20 中所謂均值收斂）。這樣廣義下的極限是方程(2)的解，且這個解是唯一的。本書限於篇幅，不擬對這情況作詳細說明。

在級數(10)中變換和及積分的次序❶，則有

❶ 很容易證明這樣變換是許可的。

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b f(s)\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m K_m(x,s)ds。$$

引用下記號

$$\Gamma(x,s;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)。\qquad(14)$$

函數 $\Gamma(x,s;\lambda)$ 叫做方程(2)的**解核**。利用這個記號的幫助,可將解縮寫成簡單形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b f(s)\Gamma(x,s;\lambda)ds。\qquad(15)$$

若我們先計算出解核,則由這個式子立即得着方程(2)的解。

公式(14)中的解核,僅當 $|\lambda|<\frac{1}{B}$ 時才有意義。現在我們引出它的一般定義。

若對於一個值 λ 和任意自由項,方程(2)有解且是唯一解,且這個解由(15)式所表示;則我們就說對於這個已知值 λ 方程(2)有解核 $\Gamma(x,s;\lambda)$。

若方程的解核存在,那末這解核是唯一的。事實上,設對於 $\lambda=\lambda_0$,方程(2)有兩個解核 $\Gamma(x,s;\lambda_0)$和 $\Gamma_1(x,s;\lambda_0)$。因當 $\lambda=\lambda_0$ 時方程(2)有唯一解,於是任意函數 $f(x)$ 可滿足下面的恆等式

$$f(x)+\lambda_0\int_a^b\Gamma(x,s;\lambda_0)f(s)ds\equiv f(x)+\lambda_0\int_a^b\Gamma_1(x,s;\lambda_0)f(s)ds。$$

因此有

$$\int_a^b u(x,s)f(s)ds\equiv 0;\quad u(x,s)=\Gamma(x,s;\lambda_0)-\Gamma_1(x,s;\lambda_0)。$$

因 $f(s)$是任意的,則對於一個定值 x,我們設 $f(s)=\overline{u(x,s)}$。於是有

$$\int_a^b|u(x,s)|^2ds=0,$$

且 $u(x,s)\equiv 0$。這樣就證明了解核存在的唯一性。

在 §9 中我們將引出解核的表達式,適用於解核存在的一切值 λ。

我們用有實用性的一個附註作爲本節的結束。逐次迫近法引出一

個無窮級數，而這個級數的和通常不能寫爲有限形式。在應用上，逐次迫近法僅能給出積分方程的近似解，在那樣情況，級數(10)的和照例是有限形式。這就顯示出可能用某種特殊方法以解積分方程，而不必藉助於一般理論。

§3. 渥爾特拉型方程 在數學物理的某些問題中，引出弗列德和蒙型方程的一個特別形式，叫做渥爾特拉方程。若方程的核是一個有界函數，且當 $s>x$ 時核恆等於零，則我們將給這個方程以那樣名稱。在這條件下，當 $x<s\leqslant b$ 時，積分

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

中積分號下的函數恆等於零，且這個積分等於

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds。$$

於是渥爾特拉型積分方程有下形式：

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)。\qquad (1)$$

關於渥爾特拉方程，有下面的正確斷言

定理 若渥爾特拉方程的自由項是絕對可積的，則對於一切值 λ，這個方程的近似解敍列是收斂的。

首先證明當 $x<s$ 時，渥爾特拉方程的一切疊核等於零；而當 $x>s$ 時，它由下式表達

$$K_m(x,s)=\int_s^x K(x,t)K_{m-1}(t,s)dt。\qquad (2)$$

我們有

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)dt。$$

當 $t>x$ 時，積分號下第一個因子爲零；而當 $t<s$ 時，第二個因子也爲零。若 $x<s$，則經常地或者 $t>x$，或者 $t<s$，因之積分等於零。但若 $x>s$，則積分號下函數僅當 $s<t<x$ 時異於零。於是我們得到(2)式在

$m=2$ 的情況。應用數學歸納法,也可能證明對於任意 m 的情況。

由定義,核 $K(x,s)$是有界函數;設 $|K(x,s)|<M$。我們設對於某一值 m,作下估計

$$|K_m(x,s)|<\frac{M^m(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}。\qquad (3)$$

在(2)中用 $m+1$ 代替 m,我們有

$$|K_{m+1}(x,s)|=\left|\int_s^x K(x,t)K_m(t,s)dt\right|<\frac{M^{m+1}}{(m-1)!}\times$$

$$\times\int_s^x (t-s)^{m-1}dt=\frac{M^{m+1}(x-s)^m}{m!},$$

也就是不等式(3)當 m 換爲 $m+1$ 時是正確的。又因當 $m=1$ 時(3)顯然是正確的,因此不等式(3)對於任意值 m 是正確的。今將(3)中的差 $x-s$ 用較大值 $b-a$ 代之,則得

$$|K_m(x,s)|<\frac{M^m(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}。$$

現在 §2 中的級數(10)的普通項小於

$$\frac{|\lambda|^m M^m(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}\int_a^b |f(s)|ds,$$

因之這個級數對於任意值 λ 是絕對收斂的且一致收斂的。

茲考慮渥爾特拉方程的核不是有界的但具有弱奇性型的情況。這樣方程有下形式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x \frac{H(x,s)}{(x-s)^\alpha}\varphi(s)ds=f(x),\quad 0<\alpha<1。\qquad (4)$$

對於任意值 λ,這個方程的近似解敍列也是收斂的,不過收斂較慢些。我們證明這個事實。

設 $|H(x,s)|<M$,其中 M 是一個常數,因此

$$|K(x,s)|<\frac{M}{(x-s)^\alpha}.$$

我們對於疊核作下面的估計。

設對於某一 m，有下估計

$$|K_m(x,s)|<\frac{M^m(x-s)^{m-1-m\alpha}\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)},\tag{5}$$

其中 Γ 是尤拉第二種積分。

在(2)中將 m 換為 $m+1$，且用不等式(5)來計算右邊，我們有

$$|K_{m+1}(x,s)|<\frac{M^{m+1}\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)}\int_s^x(x-t)^{-\alpha}(t-s)^{m-1-m\alpha}dt。$$

在最後積分中，我們作一變換 $t=s+(x-s)v$，則得

$$|K_{m+1}(x,s)|<\frac{M^{m+1}(x-s)^{m-(m+1)\alpha}\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)}\times$$

$$\times\int_0^1 v^{m-1-m\alpha}(1-v)^{1-\alpha}dv=\frac{M^{m+1}(x-s)^{m-(m+1)\alpha}\Gamma^{m+1}(1-\alpha)}{\Gamma(m+1-(m+1)\alpha)}。$$

於是不等式(5)當 m 換為 $m+1$ 時是正確的。又因當 $m=1$ 時(5)顯然是正確的，因此不等式(5)對於任意值 m 是正確的。取 m 相當大使 $(x-s)$ 的冪次是正的。在這情況，我們能將 $x-s$ 代以較大值 $b-a$。現在§2中的級數(10)的普通項小於

$$\frac{|\lambda|^m M^m(b-a)^{m-1-m\alpha}\Gamma^m(1-\alpha)}{\Gamma(m-m\alpha)}\int_a^b|f(s)|ds。\tag{6}$$

我們茲證用(6)作普通項的級數是收斂的。為了證明這個事實，我們應用斯梯林公式

$$\Gamma(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi p}}p^p e^{-p+\frac{\theta}{12p}},\quad 0<\theta<1。$$

用 a_m 表示(6)中的值，則有

$$\sqrt[m]{a_m}=\frac{|\lambda|M(b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{m}}\Gamma(1-\alpha)[2\pi m(1-\alpha)]^{\frac{1}{m}}e^{1-\alpha-\frac{\theta}{12m^2(1-\alpha)}}}{[m(1-\alpha)]^{(1-\alpha)}}\times$$

$$\times\left[\int_a^b|f(s)|ds\right]^{\frac{1}{m}}。$$

當 $m\to\infty$ 時，此值的極限等於零；由柯西判別法，對於任意值 λ，§2中的級數(10)是絕對收斂的且一致收斂的。

作為一個例子來討論下方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x e^{x-s}\varphi(s)ds=f(x)。\qquad (7)$$

我們作出這方程的疊核和解核，則有：

$$K_2(x,s)=\int_s^x e^{x-t}e^{t-s}dt=(x-s)e^{x-s}。$$

恰如同樣方法，我們求得

$$K_3(x,s)=\frac{(x-s)^2}{2!}e^{x-s},$$

且一般地有

$$K_m(x,s)=\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}e^{x-s}。$$

現在

$$\Gamma(x,s;\lambda)=e^{x-s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}=e^{(\lambda+1)(x-s)}。$$

此式當 $s\leqslant x$ 時是正確的；當 $s>x$ 時，顯然有 $\Gamma(x,s;\lambda)\equiv 0$。

由§2中(15)式，我們得到下面形式的解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)}f(s)ds。\qquad (8)$$

逐次迫近法所得到級數的和是有限形式。

我們應加以注意的，積分方程(7)可變爲很簡單的微分方程。對(7)求微商，我們有：

$$\varphi'(x)-\lambda\varphi(x)-\lambda\int_0^x e^{x-s}\varphi(s)ds=f'(x)。\qquad (9)$$

從(7)及(9)消去積分，我們得到以 $\varphi(x)$ 作未知函數的線性一級微分方程：

$$\varphi'(x)-(\lambda+1)\varphi(x)=f'(x)-f(x)。$$

這方程的積分滿足初值條件 $\varphi(0)=f(0)$ ❶，我們引出解(8)。

§4. 有退化核的積分方程 存在着一種重要類型的積分方程，我們可將它變爲代數方程組以求解。若方程的核可表爲有限個項的和，

❶ 在(7)中令 $x=0$，我們得到這個初值條件。

和中的每一項是兩個因子的乘積，其中一個因子僅依賴於 x，而另一因子僅依賴於 s，則這樣的核叫做退化核。因之退化核具有下形式

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s), \tag{1}$$

而有退化核的積分方程可表爲下形狀：

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds=f(x)。 \tag{2}$$

此 n 個函數 $a_i(x)$ 恆可能設是線性無關的。假如不然，則(1)中的和的項數作可能減少，使餘留下來的有限個函數 $a_i(x)$ 爲線性無關。恰如同樣情況，n 個函數 $b_i(s)$ 也恆可能假定是線性無關的。

有退化核的積分方程可照下述的方法以求解。我們用記號

$$c_i=\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds。 \tag{3}$$

c_i 是常數，因 $\varphi(x)$ 是未知的，從而 c_i 也是未知的。現在從方程(2)，我們得到

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x), \tag{4}$$

於是歸結於常數 c_i 的決定。爲了這個目的，我們將(4)代入積分方程(2)。經過簡化後，有：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\left\{c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k a_k(s)\right]ds\right\}=0。$$

因諸函數 $a_i(x)$ 是線性無關的，則從上式有：

$$c_i-\int_a^b b_i(s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k a_k(s)\right]ds=0;\quad i=1,2,\cdots,n。$$

爲簡單起見，我們引用下記號

$$\int_a^b b_i(s)f(s)ds=f_i,\quad \int_a^b b_i(s)a_k(s)ds=a_{ik}。$$

則有

$$c_i-\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k=f_i;\quad i=1,2,\cdots,n。 \tag{5}$$

爲了决定常數 c_i,我們得到線性代數方程組。解這個方程組,也等於解方程(2);它的解由(4)式表之。反之,若方程組(5)無解,則積分方程也沒有解。

方程組(5)的係數行列式等於

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}。\qquad (6)$$

這個 λ 的多項式的次數不大於 n; 它不恆等於零,因當 $\lambda=0$ 時它等於 1。因之有不多於 n 個相異值 λ 存在,使 $D(\lambda)=0$。當 λ 取這些值時,方程組(5)和積分方程(2)或者沒有解,或者有無窮個解。對於其餘的一切值 λ,積分方程有解,且其解是唯一的。

我們應注意的,不必將(4)代入方程(2)也可得出方程組(5)。只須以 $b_k(x)$乘(4)式的兩邊, $k=1, 2, \cdots, n$, 且對於 x 從 a 至 b 取積分,再將 i 和 k 互換,卽得出方程組(5)。

例 設所給的方程是

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(x+s)\varphi(s)ds=f(x)。$$

它的解有下形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda(c_1x+c_2)。$$

由上述方法,我們得到下方程組以决定 c_1 和 c_2:

$$\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_1-\qquad\lambda c_2=f_1,$$

$$-\frac{1}{3}c_1+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)c_2=f_2,$$

其中

$$f_1=\int_0^1 f(s)ds,\quad f_2=\int_0^1 sf(s)ds。$$

這個方程組的係數行列式等於$-\frac{\lambda^2}{12}-\lambda+1$,它對於下面兩個$\lambda$值等於零:

$$\lambda_1=-6+4\sqrt{3},$$
$$\lambda_2=-6-4\sqrt{3}。$$

若λ不等於λ_1和λ_2,則方程有唯一解:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{6(\lambda-2)(x+s)-12xs-4\lambda}{\lambda^2+12\lambda-12}f(s)ds。$$

當$\lambda=\lambda_1$或$\lambda=\lambda_2$時,一般地說積分方程沒有解。爲了對於這些特殊的值λ,方程的解存在,且也是通解,讀者將很容易求得其條件,也就是函數$f(x)$所應滿足的條件。

我們還討論下方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\cos s\,\varphi(s)ds=f(x).$$

設
$$\int_0^{2\pi}\varphi(s)\cos s\,ds=c,$$

我們有
$$\varphi(x)=f(x)+\lambda c\sin x。$$

將最後等式乘以$\cos x$,且從0至2π取積分。則有

$$c=\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx,$$

從而有
$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\cos s\,f(s)ds。$$

§ 5. 弗列德和蒙方程的一般情況　在一般場合中,弗列德和蒙方程可能變爲有退化核的方程以求解。這個可能性用多樣方法可以實現。例如,將$K(x,s)$展爲富里耶餘弦重級數:

$$K(x,s)\sim\sum_{i,k=0}^{\infty}A_{ik}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\cos\frac{k\pi s}{b-a}。\tag{1}$$

我們不必預設這個富里耶級數是收斂的。現在引用下記號

$$\sum_{i,k=0}^{n}A_{ik}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\cos\frac{k\pi s}{b-a}=P(x,s),$$

$$K(x,s)-P(x,s)=K'(x,s)。$$

所給積分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x) \tag{2}$$

可寫作下形式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K'(x,s)\varphi(s)ds=f(x)+\lambda\int_a^b P(x,s)\varphi(s)ds。 \tag{3}$$

(3)式的右邊暫時認爲是已知函數。於是方程(3)可能看成是以$K'(x,s)$作爲核的積分方程,它的參數是λ,且以

$$f(x)+\lambda\int_a^b P(x,s)\varphi(s)ds$$

作爲自由項。茲證僅須n相當大時,方程(3)可用逐次迫近法以解之。

核$K'(x,s)$是和下面的富里耶級數相適應的:

$$K'(x,s)\sim\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}A_{ik}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\cos\frac{k\pi s}{b-a}+$$

$$+\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{ik}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\cos\frac{k\pi s}{b-a}。$$

我們引用下記號

$$\int_a^b\int_a^b|K'(x,s)|^2dx\,ds=B'^2。$$

由於帕爾斯窪爾等式,有

$$B'^2=\frac{(b-a)^2}{2}\left\{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}|A_{ik}|^2+\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2\right\}。 \tag{4}$$

級數(4)是收斂級數

$$\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{i,k=0}^{\infty}|A_{ik}|^2$$

的餘項,於是可取n相當大,使它的和爲任意小正數。我們選擇這樣的n,使B'能適合下面的不等式

$$B'<\frac{1}{|\lambda|}。$$

由§2中的定理,方程(3)可用逐次迫近法以解之;且存在着解核

$$\Gamma'(x, s; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K'_m(x, s) \text{❶},$$

且由§2中的(15)式,方程(2)的解可寫爲

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s)\varphi(s)ds +$$

$$+ \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \left[f(t) + \lambda \int_a^b P(t, s)\varphi(s)ds \right] dt。$$

引用下記號

$$f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) f(t) dt = F(x),$$

$$P(x, s) + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) P(t, s) dt = K''(x, s)。 \qquad (5)$$

於是最後方程有下形式

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K''(x, s)\varphi(s)ds = F(x)。 \qquad (6)$$

這個有未知函數 $\varphi(x)$ 的積分方程和方程(3)是等價的。茲證它的核 $K''(x, s)$ 是退化核。事實上,$P(x, s)$ 是三角多項式,我們用下形式來表達

$$P(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \cos \frac{i\pi x}{b-a} b_i(s),$$

其中 $$b_i(s) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cos \frac{k\pi s}{b-a}。$$

其次,

$$\int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) P(t, s) dt = \sum_{i=1}^{n} b_i(s) \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a} dt。$$

現在引用下記號

$$a_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{b-a} + \lambda \int_a^b \Gamma'(x, t; \lambda) \cos \frac{i\pi t}{b-a} dt,$$

❶ $K'_m(x, s)$是從核 $K'(x, s)$得出的疊核。

則可寫為:

$$K''(x,s)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(s),$$

於是核 $K''(x,s)$確實是一個退化核。由於§4中指出的方法,我們可將積分方程(6)變為代數線性方程組。

上面所述的方法自然不是唯一的。若應用任何一個方法,能將一般弗列德和蒙方程的核分解成兩個核的和:

$$K(x,s)=P(x,s)+K'(x,s), \qquad (甲)$$

其中第一個核具有退化核的特徵,而第二個核適合下面的不等式

$$B'^2=\int_a^b\int_a^b |K'(x,s)|^2\,dx\,ds<\frac{1}{|\lambda|^2},$$

則我們可將一般弗列德和蒙方程變為有退化核的方程。

在實際運用上,可將所述的方法作下面的簡化。

設方程(甲)中的核的分解是使

$$\int_a^b |K'(x,s)|^2\,ds\leqslant c',$$

其中 C' 是充分小的常數。設所給方程有解,我們將見下積分

$$\int_a^b K'(x,s)\varphi(s)ds$$

也是很小的。事實上,由於布里亞柯夫斯基–施窪而茨不等式,有

$$\left|\int_a^b K'(x,s)\varphi(s)ds\right|^2\leqslant\int_a^b |K'(x,s)|^2 ds\int_a^b |\varphi^2(s)|ds\leqslant$$

$$\leqslant C'\int_a^b |\varphi^2(s)|ds,$$

可證實我們的斷言。

略去這個很小的量,立卽得到有退化核的方程:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b P(x,s)\varphi(s)ds=f(x)$$

以代替方程(3)。因此,歸結到我們沒有改變方程的自由項,而將所給方程的核代為和它充分近似的退化核。此外,原設的核和退化核之間

近似的程度決定於 C' 的值的大小。

我們考慮下面的例子。對於限在境界 L 內的有限平面區域的狄銳希勒問題的解,能歸結到解積分方程❶

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu(\tau)d\sigma=f(t)。\qquad (7)$$

此處 t 和 τ 爲參數的值,這兩個值確定曲線 L 上兩點的位置; r 爲這兩點間的距離; ν 是 L 在點 τ 處向外的法線; $d\sigma$ 是 L 的弧素; 最後, $\mu(t)$是未知函數; $f(t)$ 是已知函數。

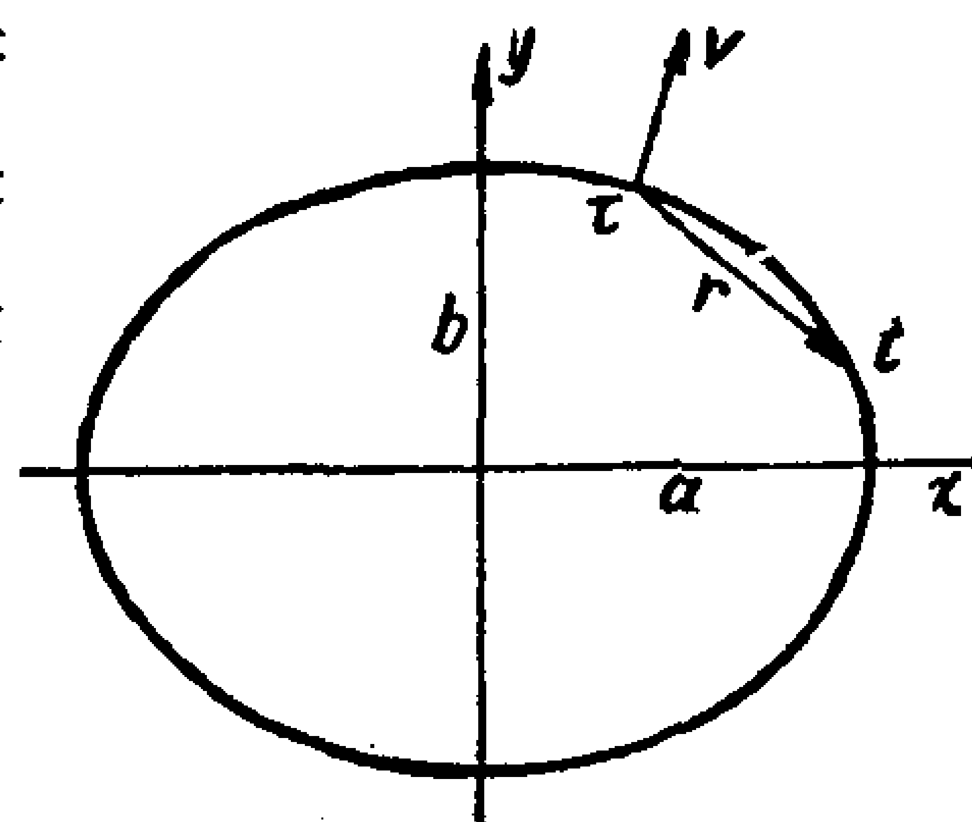


圖 1

在下篇中將證明對於任意一個函數 $f(t)$, 方程(7)有解。

設境界是以 a 及 b (圖 1) 爲半軸長的橢圓,我們來求方程(7)的近似解。這個橢圓的參數方程是

$$x=a\cos\tau,\quad y=b\sin\tau;$$

參數 τ 從 0 變至 2π。現在進行方程的核的計算。首先,

$$r^2=a^2(\cos t-\cos\tau)^2+b^2(\sin t-\sin\tau)^2=$$
$$=4a^2\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right),$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是橢圓的離心率。此外,

$$\cos(\nu,r)d\sigma=[\cos(\nu,x)\cos(r,x)+\cos(\nu,y)\cos(r,y)]d\sigma=$$
$$=\frac{1}{r}[a(\cos t-\cos\tau)dy-b(\sin t-\sin\tau)dx]=$$
$$=\frac{ab}{r}[\cos\tau(\cos t-\cos\tau)+\sin\tau(\sin t-\sin\tau)]d\tau=$$
$$=-\frac{2ab}{r}\sin^2\frac{t-\tau}{2}d\tau。$$

現在

❶ 見下篇中第一章 §29。

$$\frac{\cos(\nu, r)}{r} d\sigma = -\frac{b}{2a} \frac{d\tau}{1-\varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a}\left(1+\varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2} + \varepsilon^4 \cos^4 \frac{t+\tau}{2} + \cdots\right) d\tau。 \quad (8)$$

在所寫級數內只取有限個項，則方程中的核用退化核來替代。在這以後，解方程已經不是難事了。我們進一步來進行運算。設離心率很小，使可能僅取含有 ε^2 的項。

這樣一來，擺在我們面前的是解下面的方程

$$\mu(t) + \frac{b}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \left(1+\varepsilon^2 \cos^2 \frac{t+\tau}{2}\right)\mu(\tau) d\tau = f(t)。$$

用 $\frac{1}{2}[1+\cos(t+\tau)]$ 來代替 $\cos^2 \frac{t+\tau}{2}$，我們得到：

$$\mu(t) + \int_0^{2\pi} (\alpha+\beta\cos t\cos\tau - \beta\sin t\sin\tau)\mu(\tau) d\tau = f(t)。 \quad (9)$$

此處我們記爲

$$\alpha = \frac{b}{2\pi a}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right), \quad \beta = \frac{b\varepsilon^2}{4\pi a}。$$

從(9)，有

$$\mu(t) = f(t) - c_1 - c_2\cos t - c_3 \sin t, \quad (10)$$

其中

$$c_1 = \alpha\int_0^{2\pi} \mu(\tau) d\tau, \quad c_2 = \beta\int_0^{2\pi} \mu(\tau)\cos\tau\, d\tau,$$

$$c_3 = -\beta\int_0^{2\pi} \mu(\tau)\sin\tau\, d\tau。$$

將方程 (10) 順次乘以 α, $\beta\cos t$ 及 $-\beta\sin t$，且對於 t 自 0 至 2π 取積分，則對於三個未知數 c_1, c_2, c_3，我們得到下面三個方程：

$$c_1 = f_1 - 2\pi\alpha c_1;$$

$$c_2 = f_2 - \pi\beta c_2;$$

$$c_3 = f_3 + \pi\beta c_3,$$

其中

$$f_1=\alpha\int_0^{2\pi} f(t)dt;\quad f_2=\beta\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt;$$

$$f_3=-\beta\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt。$$

因此我們求得：

$$c_1=\frac{f_1}{1+2\pi\alpha};\quad c_2=\frac{f_2}{1+\pi\beta};\quad c_3=\frac{f_3}{1-\pi\beta}。\tag{11}$$

用相同方法，不難得出更精確的解，只須在核的展式中，保存 ε 的更高次乘冪的項。也可能得出眞解，不過它是無窮級數形式。為了得到這個解，我們用下述方法來進行。將函數

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}$$

展為富里耶級數。這是一個偶函數；且當 θ 變為 $\theta+\pi$ 時，函數值不變。因此，它的富里耶級數有下形式

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos 2k\theta,$$

或
$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}=a_0+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2}e^{2ik\theta}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2}e^{-2ik\theta}。$$

於是，由已知公式，有

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$\frac{a_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2ik\theta}d\theta}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta},\quad k\geqslant 1。$$

為了計算最後積分，令 $e^{i\theta}=z$。經過簡單變換後，我們得：

$$\frac{a_k}{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{4z^{2k+1}dz}{4z^2-\varepsilon^2(z^2+1)^2},$$

其中 γ 是圓周 $|z|=1$。在 γ 內，積分號下函數有兩個極點：

$$z_1=\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$z_2=-z_1=-\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}。$$

在極點 z_1 和 z_2 處的殘數是相等的，且此殘數等於

$$\frac{\varepsilon^{2k}}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2k}}。$$

因之我們求得：

$$a_k=\frac{2\varepsilon^{2k}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^{2k}},\quad k\geqslant 1。$$

於是所求的展式有下形式：

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{2k}\cos 2k\theta\right]。$$

現在

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}}=$$

$$=\frac{a}{b}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(\cos kt\cos k\tau-\sin kt\sin k\tau)\right]$$

其中 c 是橢圓焦點的半距，於是積分方程具有下形式

$$\mu(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\cos kt\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos k\tau\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\sin kt\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin k\tau\,d\tau=f(t)。\qquad(12)$$

引用下記號

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)d\tau=A_0,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\cos k\tau\,d\tau=A_k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\sin k\tau\,d\tau=B_k。$$

從(12)有

$$\mu(t)=f(t)-A_0-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k\cos kt-B_k\sin kt)。\qquad(13)$$

將(13)式順次乘以 $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{\cos kt}{\pi}$ 及 $\frac{\sin kt}{\pi}$, 且取積分，我們求得：

$$A_0=\frac{1}{2}F_0;\quad A_k=\frac{(a+b)^k F_k}{(a+b)^k+(a-b)^k};$$

$$B_k=\frac{(a+b)^k F'_k}{(a+b)^k-(a-b)^k}, \tag{14}$$

其中 F_0, F_k 及 F'_k 表示函數 $f(t)$ 的富里耶係數：

$$\left.\begin{aligned} F_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau;\quad F_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau\, d\tau,\\ F'_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin k\tau,\, d\tau。\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

當境界爲一個圓周時，$c=0$。且其解有下形式

$$\mu(t)=f(t)-A_0=f(t)-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau。 \tag{16}$$

然而此最後的解，也可直接求得。事實上，對於圓來說，$a=b, \varepsilon=0$，而方程(7)變爲下形狀：

$$\mu(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)d\tau=f(t)。$$

因此 $$\mu(t)=f(t)-c,\quad c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\tau)d\tau。$$

將最後式自 0 至 2π 取積分，我們求得：

$$c=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau,$$

這就引出了(16)式。

§6. **積分方程組** 在應用上常可遇到積分方程組。這樣方程組具有下形式

$$\varphi_i(x)-\lambda\sum_{k=1}^{n}\int_a^b K_{ik}(x,s)\varphi_k(s)ds=f_i(x),\quad i=1,2,\cdots,n。 \tag{1}$$

關於積分方程組的理論和解法，與一個方程的情況基本上是相同的。例如，當 λ 很小時，在特殊情況，當 λ 適合下不等式

$$|\lambda|<\left\{\max_{1\le i\le n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\int_a^b\int_a^b |K_{ik}(x,s)|^2 dx\,ds}\right\}^{-1}, \tag{2}$$

且下面的一切積分

$$\int_a^b |K_{ik}(x, s)|^2 ds$$

爲有限值時,應用逐次迫近法所得的解是收斂的。如果 $K_{ik}(x, s)$ 是退化核,則方程組可變爲代數線性方程組。在一般情況,用 § 5 內指示的方法,可將方程組(1)化爲有退化核的方程組。

積分方程組由下述方法可能改變爲一個方程式。我們考慮變量 x 和 s 的變動區間是 $(a, nb-(n-1)a)$,這個區間的長度的 n 倍超過原設區間 (a, b) 的長度。用下面的關係來確定在所指區間內的函數 $\Phi(x)$, $F(x)$, $K(x, s)$:

若 $(i-1)b-(i-2)a \leqslant x < ib-(i-1)a$,

則令 $\Phi(x)=\varphi_i(x-(i-1)(b-a))$;

若 $(i-1)b-(i-2)a \leqslant x < ib-(i-1)a$,

則令 $F(x)=f_i(x-(i-1)(b-a))$;

若 $(i-1)b-(i-2)a \leqslant x < ib-(i-1)a$,

$(k-1)b-(k-2)a \leqslant s < kb-(k-1)a$,

則令 $K(x, s)=K_{ik}(x-(i-1)(b-a), s-(k-1)(b-a))$。

從上面的定義,則方程組(1)具有一個方程的形式

$$\Phi(x)-\lambda\int_a^{nb-(n-1)a} K(x, s)\Phi(s)ds=F(x)。 \qquad (3)$$

§ 7. 積分的近似公式的採用 將所給核代爲退化核,就能夠運用公式以求解。此公式對於區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 內的一切值 x 及任意參數值 λ 都適用。這個方法嚴重的缺點,是需要積分的計算,有時在計算中會相當複雜,特別在退化核的項數相當多時困難也更大。這個缺點在逐次迫近法中也存在着。這裏我們指出求積分方程近似解的一個方法,這個方法不需要積分的計算。

設在方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds=f(x) \qquad (1)$$

中，核 $K(x, s)$和自由項 $f(x)$ 當 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant b$ 時是連續的。於是 $\varphi(x)$ 也是連續的。從積分的近似公式，將積分

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

代爲一個有限項的和。例如，由矩形公式：

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds \approx h\sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\varphi(x_k),$$

其中 $$h=\frac{b-a}{n}, \quad x_k=a+kh。$$

在近似方程

$$\varphi(x)-\lambda h\sum_{k=1}^{n} K(x,x_k)\varphi(x_k)=f(x)$$

中，用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代 x。於是我們得到代數線性方程組，它的未知數是 $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n)$：

$$\varphi(x_i)-\lambda h\sum_{k=1}^{n} K(x_i,x_k)\varphi(x_k)=f(x_i), \ i=1, 2, \cdots, n。\qquad (2)$$

解這個方程組，我們求得未知函數 $\varphi(x)$ 在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 各點的近似值。應用任一插入法公式，我們得到在整個區間内 $\varphi(x)$ 的近似表達式。

更簡單一些，可從積分方程本身來得到近似公式：將方程中的積分用有限項的和代之，我們得到近似值

$$\varphi(x)\approx f(x)+\lambda h\sum_{k=1}^{n} K(x,x_k)\varphi(x_k)。$$

自然可能用其他的積分近似公式以代替矩形公式。當我們用辛普生公式或用更好一些的高斯公式時，可得到更精確的解。

當 $n\to\infty$ 時，則由所指的方法得出的 $\varphi(x)$ 的近似值有極限，這個極限是積分方程(1)的解。祗須這個解存在且是唯一的。至於嚴格的理論的證明，可參考洛·維·卡托洛維奇和維·伊·克鋭洛夫兩氏所著的書[42]。

我們用指示的方法,來解 §5 中關於橢圓的方程(7)。爲了可能將全部運算直到最後結果,我們給 a 和 b 以數值,也給函數 $f(t)$ 以確定的形式。例如,令

$$a=5,\ b=3,\ f(t)=x^2+y^2=25\cos^2 t+9\sin^2 t。$$

我們的方程有下形式(近似的)

$$\mu(t)+0.10\int_0^{2\pi}\mu(\tau)\frac{d\tau}{1-0.64\cos^2\frac{t+\tau}{2}}=25\cos^2 t+9\sin^2 t,$$

若利用 $\mu(t)$ 的週期性質,或爲

$$\mu(t)+\int_{-\pi}^{+\pi}\mu(\tau)\frac{d\tau}{6.8-3.2\cos(t+\tau)}=25-16\sin^2 t。\qquad (3)$$

在與坐標軸對稱的一切點處,上方程的右端取等值。從 §5 中的(13)式出發,不難推斷 $\mu(t)$ 具有下面的性質,也就是

$$\mu(\pi-t)=\mu(-t)=\mu(t)。\qquad (4)$$

由此也很顯然地指出 $\mu(t)$ 有週期 2π。於是,祇須將 $\mu(t)$ 確定在區間 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 內。

我們取 $n=12$,因之 $h=\frac{\pi}{6}$。爲簡單起見,我們用下記號

$$\mu(0)=y_1,\ \mu\left(\frac{\pi}{6}\right)=y_2,\ \mu\left(\frac{\pi}{3}\right)=y_3,\ \mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_4。$$

在現在的情況,方程組(2)有下形式

$$\left.\begin{aligned}1.19\,y_1+0.35\,y_2+0.31\,y_3+0.15\,y_4&=25,\\0.18\,y_1+1.34\,y_2+0.32\,y_3+0.16\,y_4&=21,\\0.16\,y_1+0.32\,y_2+1.34\,y_3+0.18\,y_4&=13,\\0.15\,y_1+0.31\,y_2+0.35\,y_3+1.19\,y_4&=\ 9。\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

這個方程組的解是

$$y_1=16.04,\ y_2=12.27,\ y_3=4.73,\ y_4=0.94。$$

因 $\mu(t)$ 是週期函數,在我們的例子中的插入法,最好藉富里耶級數的幫助。因 $\mu(t)$ 適合關係(4),則它的富里耶級數有下形式

$$\mu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos 2kt。$$

在這個級數中僅保留前四項。已知 $\mu(t)$ 的四個函數值，我們可以計算四個係數 a_0, a_1, a_2, a_3。應用通常方法，我們求得

$$a_0=8.50,\quad a_1=0,\quad a_2=7.54,\quad a_3=0,$$

$$\mu(t)\approx 8.50+7.54\cos 2t。\qquad (6)$$

將(6)與§5中的(13)—(15)式來加以比較。在現在的情況

$$f(t)=25-16\sin^2 t=17+8\cos 2t,$$

於是 $F_0=17$, $F_2=8$，而其餘的富里耶係數皆等於零。由§5中的(14)式，有

$$A_0=8.50,\quad A_2=7.53。$$

其餘的係數 A_k 和一切 B_k 皆等於零。這樣就有

$$\mu(t)=8.50+7.53\cos 2t。$$

我們看出，在應用上近似解(6)的準確度是很大的；當 $t=\frac{\pi}{2}$ 時所產生的誤差約爲1%。當 $t=0$ 時所產生的誤差小於0.07%。

§8. 弗列德和蒙定理　我們已經見到積分方程的解，一般地說，不能是完整形式。在解積分方程的時候，照常必須採用近似方法。同時，在§5和§7中，我們已經注意到，僅當方程的可解性是預先知道的，而且這樣可解性是對於任意自由項而言的時候，我們才有可能有把握地應用近似方法。因此，在假定它的可解性之前，方程的分析是具有重要意義的。這樣分析，對於各種情況來說，都可能按照弗列德和蒙氏所建立的有關於積分方程的一般定理來進行。這樣的定理共有四個。

我們將規定好下面的一些術語。對於一值 λ，弗列德和蒙的解核存在，這樣的 λ 將叫做正則值。又對於解核不存在的 λ，叫做特徵值或基本值。特徵值的倒數叫做方程的奇異值。

很明顯地，如果 λ 是一個正則值，則齊次方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0\qquad (1)$$

僅有零解 $\varphi(x)\equiv 0$。

我們設齊次方程(1)有不恆等於零的解;由定理1,僅當 λ 是特徵值時才有可能。若 $\varphi_1(x)$ 是方程(1)的解,則 $c\varphi_1(x)$ 也是它的解,此處 c 是任意常數;若 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是方程(1)的兩個解,則其和 $\varphi_1(x)+$ $+\varphi_2(x)$ 也是它的解。這樣一來,如果 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_k(x)$ 滿足齊次方程(1),則它們的任意線性組合

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x)$$

也滿足方程(1)。於是,若齊次積分方程雖然祇有一個不爲零的解(不恆等於零的解),則它有無窮個這樣的解。齊次積分方程不爲零的解叫做核 $K(x, s)$ 的特徵函數或基本函數。它們是和已知的特徵值對應的。

我們首先提出弗列德和蒙全部定理,然後將其中某些部分歸結到線性代數的情況,按照這樣情況,我們可證明弗列德和蒙定理。

定理 1. 在 λ 平面的任意有限區域內,弗列德和蒙積分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds=f(x) \tag{2}$$

有不多於有限個特徵值。

定理 2. 每一特徵值至少和一個特徵函數對應。和一個已知特徵值對應的且是線性無關的那些特徵函數的個數是有限的。

在提出其餘兩個弗列德和蒙定理之前,我們引入一個新概念,這個概念在積分方程理論中起着重要作用。用 $\overline{K(s, x)}$ 表示一個新核,這是從原設的核 $K(x, s)$ 得來的,就是將 $K(x, s)$ 的兩個變數互換後,再將結果代爲共軛式即得到 $\overline{K(s,x)}$,我們叫它是 $K(x, s)$ 的共軛核,且把下方程

$$\psi(x)-\bar{\lambda}\int_a^b \overline{K(s, x)}\psi(s)ds=g(x) \tag{3}$$

叫做方程(1)的共軛方程。對於齊次方程同樣也有對應的共軛方程。共軛方程是從將已知核代爲共軛核,且將參數代爲共軛數,而以完全任

意函數 $g(x)$ 作爲自由項而得者❶。

應注意的，這個共軛性是相對的性質，也可說方程（1）是方程（3）的共軛方程。

如果 $K(s, x)$ 是實函數，則它的共軛核即可簡單地由於變數互換而得。

定理 3. 若 λ_0 是核 $K(x, s)$ 的特徵值，則 $\bar{\lambda}_0$ 是它的共軛核 $\overline{K(s,x)}$ 的特徵值。方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0 \tag{4}$$

的線性無關的特徵函數的個數，和它的共軛方程

$$\psi(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K(s, x)}\psi(s)ds=0 \tag{5}$$

的特徵函數的個數是相同的。

在下面起着重要作用的是數量積的概念。我們稱下積分

$$(\varphi, \psi)=\int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

是兩個函數 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 的數量積 (φ, ψ)。

從數量積的定義，立可推知它的幾個簡單性質。

(a) 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是多個函數相加之和，則這兩個函數的數量積，就按照多個函數求積的規律；例如，

$$(\varphi_1+\varphi_2, \psi_1+\psi_2)=(\varphi_1, \psi_1)+(\varphi_1, \psi_2)+(\varphi_2, \psi_1)+(\varphi_2, \psi_2)。$$

(б) 若將數量積中的兩個因子互換，則變爲共軛複數：

$$(\psi, \varphi)=\overline{(\varphi, \psi)}。$$

(в) 當第一個因子乘以常數，則可能將這個常數因子放在數量積

❶ 在積分方程的教程中，將共軛方程通常寫作下形式

$$\omega(x)-\lambda\int_a^b K(s, x)\omega(s)ds=h(x);$$

若令 $\omega(x)=\overline{\psi(x)}$，$h(x)=\overline{g(x)}$，且將方程（3）中的一切項代作它們的共軛複數，也得到這樣的共軛方程。

符號之外:

$$(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)。$$

(г) 當第二個因子乘以常數,我們可以預先將這個常數代作它的共軛複數,則可能將這個共軛複數放在數量積符號之外:

$$(\varphi,\lambda\psi)=\bar{\lambda}(\varphi,\psi)。$$

(д) 一個函數和它本身的數量積是一個不爲負的數量:

$$(\varphi,\varphi)=\int_a^b|\varphi^2(x)|dx\geqslant 0;$$

當且僅當 $\varphi(x)\equiv 0$ 的時候,$(\varphi,\varphi)=0$。

若

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx=0,$$

則謂 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 在區間(a,b)內是正交的。

若這兩個函數皆爲實函數,則正交條件簡化爲下形式

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=0。$$

數量$\sqrt{(\varphi,\varphi)}$叫做 $\varphi(x)$ 的模,以後用符號$\|\varphi\|$表示 $\varphi(x)$ 的模。

如果一個函數的模等於 1, 則這個函數叫做標準函數。

我們將論述有關於模的幾個重要性質。任意函數的模自然不是負數,模等於零的意義無異於其相應的函數也等於零。此外,若 a 是一常數,顯然有 $\|a\varphi\|=|a|\cdot\|\varphi\|$。應用布里亞柯夫斯基-施瓦而茨不等式於積分

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx,$$

則我們得

$$|(\varphi,\psi)|^2\leqslant\left(\int_a^b|\varphi(x)|\cdot|\psi(x)|\cdot dx\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b|\varphi^2(x)|dx\int_a^b|\psi^2(x)|dx,$$

於是有

$$|(\varphi,\psi)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|\psi\|。$$

此最後不等式，我們也叫做布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式。

現在我們考慮下値

$$\|\varphi+\psi\|^2=(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=(\varphi,\varphi)+(\varphi,\psi)+(\psi,\varphi)+(\psi,\psi)。$$

應用布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式於中間兩項，我們得

$$\|\varphi+\psi\|^2\leqslant\|\varphi\|^2+2\|\varphi\|\cdot\|\psi\|+\|\psi\|^2,$$

因之得到所謂**三角不等式**

$$\|\varphi+\psi\|\leqslant\|\varphi\|+\|\psi\|。$$

此處所列舉有關於模的諸性質，在第二章中將有廣泛的應用。

下面我們將應用下記號

$$K\varphi=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds。$$

在共軛方程內的積分，我們用記號 $K^*\psi$:

$$K^*\psi=\int_a^b \overline{K(s,x)}\psi(s)ds。$$

我們稱 $K\varphi$ 爲**弗列德和蒙算子**，而稱 $K^*\psi$ 爲關於 $K\varphi$ 的**共軛算子**。顯然，$K\varphi$ 也是關於 $K^*\psi$ 的共軛算子。共軛算子間有下面的一個很重要關係：

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K^*\psi)。\tag{6}$$

事實上，

$$(K\varphi,\psi)=\int_a^b\left\{\overline{\psi(x)}\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\right\}dx=$$

$$=\int_a^b\varphi(s)\left\{\int_a^b K(x,s)\overline{\psi(x)}dx\right\}ds,$$

若將 x 和 s 互換，或爲

$$(K\varphi,\psi)=\int_a^b\varphi(x)\left\{\int_a^b K(s,x)\overline{\psi(s)}ds\right\}dx,$$

但
$$\int_a^b K(s,x)\overline{\psi(s)}ds=\overline{\int_a^b\overline{K(s,x)}\psi(s)ds}=\overline{K^*\psi}。$$

因之有
$$(K\varphi,\psi)=\int_a^b\varphi(x)\overline{K^*\psi}\,dx=(\varphi,K^*\psi)。$$

若 $K\varphi$ 和 $L\varphi$ 為下形式兩個算子

$$K\varphi=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds;\quad L\varphi=\int_a^b L(x,s)\varphi(s)ds,$$

則很容易看到 $K(L\varphi)$ 也是算子,且有

$$K(L\varphi)=\int_a^b M(x,s)\varphi(s)ds,$$

其中

$$M(x,s)=\int_a^b K(x,t)L(t,s)dt。$$

我們將寫 $KL\varphi$ 以替代 $K(L\varphi)$。在此應注意的,一般地講 $KL\varphi\neq LK\varphi$。其次,我們將記為 $K^2\varphi=KK\varphi$, $K^3\varphi=KK^2\varphi$,依此類推。顯明地,有

$$K^n\varphi=\int_a^b K_n(x,s)\varphi(s)ds,$$

其中 $K_n(x,s)$是核 $K(x,s)$的 n 次疊核。

同樣地我們不難推知

$$(KL)^*\varphi=L^*K^*\varphi。$$

事實上,由(6)式,有

$$(KL\psi,\varphi)=(\psi,(KL)^*\varphi)。$$

另一方面,再由(6)式,有

$$(KL\psi,\varphi)=(L\psi,K^*\varphi)=(\psi,L^*K^*\varphi)。$$

將所得結果相等,我們得到

$$(\psi,(KL)^*\varphi-L^*K^*\varphi)=0。$$

函數 $\omega(x)=(KL)^*\varphi-L^*K^*\varphi$ 將與任意函數 ψ 是正交的,在特別情況,與它本身也是成正交的。於是有

$$0=(\omega,\omega)=\int_a^b|\omega^2(x)|dx,$$

從而 $\omega(x)\equiv 0$,也就是 $(KL)^*\varphi\equiv L^*K^*\varphi$。

順便提及的,從上面所證的等式,則有 $(K^n)^*=(K^*)^n$,也就是說,n 次疊核的共軛核是共軛核的 n 次疊核。

應用正交性的概念,我們可將弗列德和蒙第四個定理述如下形式

定理4. 設 λ_0 是核 $K(x,s)$ 的一個特徵值,則非齊次方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds=f(x) \tag{7}$$

有解的必要與充分條件,是這方程的自由項 $f(x)$ 與共軛齊次方程

$$\psi(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K(s, x)}\psi(s)ds=0$$

的一切特徵函數是正交的。

現在我們引用有關於代數線性方程的幾個定理,但不加以證明。這些問題的詳細說明,讀者可在 В. И. 斯米爾諾夫著的高等數學教程第三卷中找到。

將 n 個複數按確定的次序寫出 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,稱它爲向量,我們將用在上面附有箭頭的字母表示向量。關於向量的加法運算,常數與向量的乘積及數量乘的運算等,由下面的形式來確定

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

$$\lambda\vec{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n),$$

$$(\vec{x}, \vec{y})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n。$$

若$(\vec{x}, \vec{y})=0$,則謂 $\vec{x}$ 及 $\vec{y}$ 是正交的。

向量$(0, 0, \cdots, 0)$稱爲零向量,而以記號 0 表之。若下等式

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\vec{x}^{(j)}=0$$

僅當一切 c_j 等於零時才能夠成立,則謂 k 個向量 $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \cdots, \vec{x}^{(k)}$ 是線性無關的。在相反情況,則謂這 k 個向量是線性相關的。

線性方程組

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k=b_j,\ j=1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

可能考慮是一個方程,從這個方程,可由已知向量 $\vec{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 來確定向量 $\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

方程組

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kj}}\, y_k = g_j, \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

叫做方程組(8)的共軛方程組。兩個共軛方程組的行列式的兩個值是互相共軛的。

下面幾個定理是正確的:

(a) 若方程組的行列式不爲零,則不論方程組的右端爲何,這方程組和它的共軛方程組皆有解,且其解是唯一的。在特殊情況,齊次方程組僅有零解。

(б) 若方程組的行列式等於零,則齊次方程組有不爲零的解❶。兩個共軛齊次方程組的線性無關的解的個數是相同的;這樣解的個數是介乎1與n之間。若$\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \cdots, \vec{x}^{(r)}$是齊次方程組的一切可能線性無關的解,則方程組的通解是

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}^{(j)},$$

其中c_j是任意常數。

(в) 若方程組(8)的行列式等於零,則當且僅當向量$\vec{b}$與共軛齊次方程組的一切解成正交時,方程組(8)才有解。方程組(8)的通解具有下形式

$$\vec{x} = \vec{x}^{(0)} + \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{x}^{(j)},$$

其中c_j及$\vec{x}^{(j)}$是取定理(б)中的相同值,而$\vec{x}^{(0)}$是方程組(8)的任一特解。

我們轉向弗列德和蒙定理的證明。在§5中已經指出,一般形式的弗列德和蒙方程,可歸結於和它等價的有退化核的方程;而後者也可歸結於代數線性方程組。設λ在$|\lambda| \leqslant R$圓內變動,由§5中的關係,如果可將核作這樣的分解,使$B' < \dfrac{1}{R+1}$,則上面方程組的諸係數和自由項在同一圓$|\lambda| \leqslant R$內皆是λ的純函數。其次,因當$\lambda=0$時,方程組的行

❶ 爲着與零解,也就是恆等於零的解有所區別;齊次方程這樣的解,叫做非零解。

列式變爲 1，故這個行列式不恆等於零。於是這個行列式在圓 $|\lambda|\leqslant R$ 內是 λ 的純函數，它在這個圓的內部僅可能有有限個零點。由於定理(a)，在所指圓內的其他一切值 λ 皆爲正則值。這就證明了弗列德和蒙第一定理。

附註 1. 從弗列德和蒙第一定理，顯示出下面的等價結果：

弗列德和蒙方程的特徵值的個數或爲有限，或爲可列；在後者情況，特徵值隨同它的個數增加至無窮大。

附註 2. 若核是退化核，則上述的行列式是 λ 的多項式。因此退化核的特徵值的個數成一有限集。

從定理(6)，立卽推得弗列德和蒙第二定理。事實上，設 $\lambda=\lambda_0$ 是一特徵值。於是 §4 中的方程組(5)的行列式等於零，且和行列式對應的齊次方程組有 r 個線性無關的解 $\vec{c}^{(j)}=(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \cdots, c_n^{(j)})$，$1\leqslant r\leqslant n$。由 §4 中的(4)式，從每一個這樣的解，齊次積分方程有對應的解

$$\varphi_j(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(j)} a_i(x)。$$

這些解是線性無關的：事實上，設 $\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\varphi_j(x)=0$。將上面的 $\varphi_j(x)$ 代入，且應用函數 $a_i(x)$ 的線性無關性質，我們得到

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j c_i^{(j)}=0,\ i=1, 2, \cdots, n,$$

或也得到

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j \vec{c}^{(j)}=0。$$

因諸向量 $\vec{c}^{(j)}$ 是線性無關的，則 $\alpha_j=0$，$j=1, 2, \cdots, n$，於是諸函數 $\varphi_j(x)$ 也是線性無關的。弗列德和蒙齊次方程顯然沒有別的解。

我們稱 r 是特徵值 λ_0 的秩。

當方程的核是退化核時，弗列德和蒙第三定理可簡單地由定理(6)推得。在這樣情況，僅須注意到，由於 §4 中的方法，可將一對共軛積分方程化爲一對共軛線性方程組。而由於定理(6)，這兩個方程組有相同

個數的線性無關的解。

這個推論不能立即應用到有任意核的弗列德和蒙方程。因爲從§5,將兩個共軛方程化爲有退化核的兩個方程,我們不能確信後面兩個方程必爲共軛。爲了避免這個困難,我們可用下法來處理。應用§5的方法於方程(4),則得到一個等價方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K''(x, s)\varphi(s)ds=0。\tag{10}$$

(4)式的共軛方程(5)寫作下形式

$$\psi(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K'(s, x)}\psi(s)ds=\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{P(s, x)}\psi(s)ds\tag{11}$$

且令

$$\psi(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K'(s, x)}\psi(s)ds=\omega(x)。\tag{12}$$

將(12)式看作有未知函數 $\varphi(x)$ 的積分方程,用逐次迫近法解它。於是得

$$\psi(x)=\omega(x)+\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{\Gamma'(s, x; \lambda_0)}\omega(s)ds。\tag{13}$$

將(12)及(13)代入方程(11),我們得到關於 $\omega(x)$ 的有退化核的積分方程

$$\omega(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K''(s, x)}\omega(s)ds=0,\tag{14}$$

這方程與(10)是共軛的。從上面證明,它與方程(10)或也與方程(4)有相同個數的解。其次,由於(12)及(13),對於方程(5)及(14)的解之間建立了一一對應的關係,且線性無關的解對應於線性無關的解。於是方程(5)及(14),從而齊次共軛方程(4)及(5)有相同個數的線性無關的解。

我們轉到弗列德和蒙第四定理。定理的必要條件可很簡單地證明。設 λ_0 是一個特徵值,且 $\psi(x)$ 是方程(5)的任意解。設非齊次方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)$$

有解。作 $f(x)$ 和 $\psi(x)$ 的數量積：

$$(f,\psi)=(\varphi-\lambda_0K\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)-\lambda_0(K\varphi,\psi),$$

由(6)式，可能變爲下形式

$$(f,\psi)=(\varphi,\psi)-\lambda_0(\varphi,K^*\psi)。$$

將右端的兩個數量積併爲一個；常數因子 λ_0 在數量積內屬於第二個因子，因此我們必須將 λ_0 代作 $\bar{\lambda}_0$。現在有

$$(f,\psi)=(\varphi,\psi-\bar{\lambda}_0K^*\psi)。$$

由方程(5)，右端數量積內的第二個因子等於零。於是 $(f,\psi)=0$。

我們證明第四定理的充分條件。第一步，對於有退化核的方程證之。由 §4 中的方法，我們可將方程(5)化爲線性方程組

$$\gamma_j-\bar{\lambda}_0\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_{kj}\gamma_k=0,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{15}$$

其中 $$\gamma_j=\int_a^b\overline{a_j(s)}\psi(s)ds。$$

此時，不難推知

$$\psi(x)=\bar{\lambda}_0\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\overline{b_k(x)}。$$

設特徵值 λ_0 的秩等於 r。方程組(15)有 r 個線性無關的解

$$\vec{\gamma}^{(j)}=(\gamma_1^{(j)},\gamma_2^{(j)},\cdots,\gamma_n^{(j)}),\ j=1,2,\cdots,r,$$

方程(5)與它們對應的解則爲

$$\psi_j(x)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(j)}\overline{b_k(x)}。$$

由定理(B)，如果

$$(\vec{f},\vec{\gamma}^{(j)})=0,\ j=1,2,\cdots,r, \tag{16}$$

其中 $$\vec{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$$

則 §4 中的方程組(5)以及和它對應的積分方程有解。

其次，由 f_k 的定義，

$$(\vec{f}, \vec{\gamma}^{(j)}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \overline{\gamma}_k^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma}_k^{(j)} \int_a^b f(x) b_k(x) dx =$$

$$= \int_a^b f(x) \overline{\psi_j(x)} \, dx = (f, \psi_j),$$

於是積分方程有解的條件(16)歸結到弗列德和蒙第四定理中的條件。

在一般情況,我們將所設方程化爲和它等價的 § 5 中方程(6),對於這個方程的有解性,祇須證

$$(F, \omega) = 0, \tag{17}$$

其中 $\omega(x)$ 是齊次方程(14)的任意解,而方程(14)是與 §5 中的(6)式共軛的。但 $F(x) = f(x) + \lambda_0 \Gamma' f$, 此處引用下記號

$$\Gamma' f = \int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda_0) f(s) ds,$$

因此 $(F, \omega) = (f + \lambda_0 \Gamma' f, \omega) = (f, \omega) + \lambda_0 (\Gamma' f, \omega)$。

但由(6)式,$(\Gamma' f, \omega) = (f, \Gamma'^* \omega)$,其中

$$\Gamma'^* \omega = \int_a^b \overline{\Gamma'(s, x; \lambda_0)} \omega(s) ds。$$

如同弗列德和蒙第三定理的證明,我們得到

$$(F, \omega) = (f, \omega + \overline{\lambda}_0 \Gamma'^* \omega),$$

由(13)式,或爲

$$(F, \omega) = (f, \psi),$$

其中 ψ 是齊次方程(5)的解,而方程(5)與所設方程是共軛的;故所設方程有解的條件(17)變爲:

$$(f, \psi) = 0,$$

這就是弗列德和蒙第四定理中的條件。

如果 λ_0 是一個特徵值,且方程

$$\varphi(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \tag{18}$$

有解,則它有無窮多個解。事實上,設 $\varphi_0(x)$ 是方程(18)的一個解。設 $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Phi(x)$。將這個函數代入(18),我們推知 $\Phi(x)$ 須適合齊

次方程

$$\Phi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\Phi(s)ds=0。$$

由定理 2,最後方程有不恆等於零的解。設 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_k(x)$ 是這個方程的線性無關的特徵函數。於是它的通解將是

$$\Phi(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x),$$

而方程(18)的通解將是

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_k\varphi_k(x)。\qquad(19)$$

從弗列德和蒙定理顯示出弗列德和蒙交比定理:

或者有任意自由項的非齊次積分方程有解,或者和它對應的齊次方程有不恆等於零的解。

在積分方程的研究中,我們常應用弗列德和蒙交比定理。

§9. 弗列德和蒙解核❶ 在 §2 中我們已經建立了解核的解析式,這個解析式對於較小的 λ 值是有效的:

$$\Gamma(x,s;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)。\qquad(1)$$

這一節的最後目的,是要尋求解核的一個解析式,而這個解析式對於參數 λ 的一切正則值是有效的。此處我們設方程的核除了適合 §2 中的不等式(1)外,還要滿足下面不等式

$$\int_a^b |K^2(x,s)|dx<E,\ E=常數。\qquad(2)$$

從級數(1)出發,我們初步地確定解核的幾個性質。

我們對於疊核作一個估計。由 §2 中的(8)式,

$$K_m(x,s)=\int_a^b K_{m-1}(x,t)K(t,s)dt。$$

對於最後積分,應用布里亞柯夫斯基-施瓦而茨不等式,有

$$|K_m^2(x,s)|\leqslant\int_a^b |K_{m-1}^2(x,t)|dt\int_a^b|K^2(t,s)|dt,$$

❶ 這一節可略去,對以後的瞭解沒有妨礙。

由 §2 中不等式(1)和這一節的不等式(2),則有

$$|K_m(x, s)| < \sqrt{C_1 E}\, B^{m-1}。 \tag{3}$$

從不等式(3)則有結論:在圓 $|\lambda| < \frac{1}{B}$ 內,級數(1)對於一切變數 x 及 s 是絕對收斂的且一致收斂的。在級數(1)中,將疊核代作 §2 中它的表達式(8)。由於級數的一致收斂性,可將和及積分兩符號的次序互換,我們得出解核應滿足的積分方程❶

$$\Gamma(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda\int_a^b K(x, t)\Gamma(t, s; \lambda)dt。 \tag{4}$$

還考慮下積分

$$\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, s; \lambda)dt = \int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1}K_m(x,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}K_n(t, s)dt。$$

因級數(1)的絕對收斂性,積分號下的兩級數可逐項相乘,又因它的一致收斂性可逐項積分,於是有

$$\int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, s; \lambda)dt = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{m+n-2}K_{m+n}(x, s)。$$

令 $m+n=p$,且變更和的次序;右端的級數則有這樣形式:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^{p-2}K_p(x, s) = \sum_{p=2}^{\infty} (p-1)\lambda^{p-2} K_p(x,s) = \frac{\partial\Gamma(x, s; \lambda)}{\partial\lambda}。$$

於是求得解核應滿足非線性微積分方程

$$\frac{\partial\Gamma(x, s; \lambda)}{\partial\lambda} = \int_a^b \Gamma(x, t; \lambda)\Gamma(t, s; \lambda)dt。 \tag{5}$$

現在須注意下事實。當 $x=s$ 時,核在區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 內可能是不可積的。在這樣情況,當 $x=s$ 時,我們可將核的值作任意改變,而使 $K(x, x)$ 在區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 內變爲連續。例如,可設 $K(x, x) \equiv 0$。在我們所考慮的一類函數 $\varphi(x)$,核的這樣改變不影響弗列德和蒙算子

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

---

❶ 如果我們從 §2 中的(8_1)式出發,用同樣方法,可得到方程

$$\Gamma(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda\int_a^b K(t, s)\Gamma(x, t; \lambda)dt。$$

在任一點的值。現在我們可算作對於一切值 m，下積分

$$A_m=\int_a^b K_m(x, x)dx$$

皆存在。積分 A_m 叫做核 $K(x, s)$的 m 次跡。它也可叫做m 次疊核的跡。在(1)中，令 $s=x$ 且取積分，得到以後需要的公式

$$\int_a^b \Gamma(x, x; \lambda)dx=\sum_{m=1}^{\infty} A_m\lambda^{m-1}。\qquad (6)$$

現在研究對於任意正則值 λ 積分方程的解的構成。給一個任意正數 R，我們將在圓 $|\lambda|\leqslant R$ 內來考慮。將核 $K(x, s)$分解作 $K(x, s)=$ $=P(x, s)+K'(x, s)$，其中 $P(x, s)$是三角多項式，且

$$\int_a^b\int_a^b |K'(x, s)|^2\, dx\, ds\leqslant\frac{1}{(R+1)^2}。$$

其次，如 §5 中同樣處理，我們將所設積分方程化為 §5 中的方程(6)，使後者的核是退化核。由 §4 中的方法，這個有退化核的方程也可化為代數線性方程組。解這個方程組，我們容易求出所設積分方程在圓 $|\lambda|\leqslant R$ 內的解可能表如下形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma'(x, s; \lambda)f(s)ds+\lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x); \qquad (7)$$

c_k 是上面所說的線性方程組的解；它和 §4 中方程組(5)是相同的，祇須設 §4 中方程組(5)的 f_k 為

$$f_k=\int_a^b F(s)b_k(s)ds=$$

$$=\int_a^b [f(s)+\lambda\int_a^b \Gamma'(s, t; \lambda)f(t)dt]\, b_k(s)ds=$$

$$=\int_a^b f((s)\tilde{b}_k(s)ds,$$

此處為簡單起見，令

$$\tilde{b}_k(s)=b_k(s)+\lambda\int_a^b \Gamma'(s, t; \lambda)b_k(t)dt。$$

因 λ 是一個正則值，則 §4 中方程組(5)的行列式異於零，我們將以

$D_R(\lambda)$ 表示這個行列式，且用克拉麥公式來確定 c_k。這公式中的分子是一個行列式，將這個行列式依照元素 f_m 展開，則有下形式

$$c_k=\frac{1}{D_R(\lambda)}\sum_{m=1}^{n}\Delta_{mk}(\lambda)f_m;$$

其中用 Δ_{mk} 表示位置在第 m 列第 k 行的元素的餘因子。將 c_k 和 f_m 代入(7)式，則得到

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)f(s)ds, \tag{8}$$

其中，令

$$\Gamma(x, s; \lambda)=\Gamma'(x, s; \lambda)+\frac{1}{D_R(\lambda)}\sum_{k,m=1}^{n}\Delta_{mk}(\lambda)a_k(x)\bar{b}_m(s)。 \tag{9}$$

回憶 §2 中解核的定義，我們有最後結果：對於一切正則值 λ，弗列德和蒙方程有解核。在圓 $|\lambda|\leqslant R$ 內，解核由(9)式確定。

注意解核的下面幾個簡單性質。

1. 解核在 λ 全平面上是半純函數。這可從下述事實直接推得，即在以 R 作半徑的任意圓內解核僅可能有有限個極點。這些極點僅是模不大於 R 的特徵值，也就是模不大於 R 的 $D_R(\lambda)$ 的零點。

2. 當 λ 的值很小時，解核由級數(1)確定。這可從 §2 中解核的唯一性以證之。

3. 從解析開拓原理，顯示出解核在 λ 全平面上滿足方程(4)及(5)。

4. 每一特徵值是解核的極點。

設這個事實不成立。也就是解核在特徵值 λ_0 點是全純的。令 $\psi_0(x)$ 是共軛方程

$$\psi(x)-\bar{\lambda}_0\int_a^b \overline{K(s, x)}\psi(s)ds=0$$

的特徵函數。由弗列德和蒙第四定理，方程

$$\varphi(x)-\lambda_0\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds=\psi_0(x) \tag{10}$$

沒有解。現在設 λ 是與 λ_0 近似的一個正則值。方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=\psi_0(x) \tag{11}$$

有解,這個解是由(8)式中以 $\psi_0(x)$ 代 $f(x)$ 得之。將這解代到(11),則得

$$\psi_0(x)+\lambda\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda)\psi_0(s)ds-$$
$$-\lambda\int_a^b K(x,s)\left\{\psi_0(s)+\lambda\int_a^b \Gamma(s,t;\lambda)\psi_0(t)dt\right\}ds=\psi_0(x)。$$

因解核在 $\lambda=\lambda_0$ 點是全純的,則可能在積分號下取 $\lambda\to\lambda_0$ 的極限。按這樣處理後,得到

$$\psi_0(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda_0)\psi_0(s)ds-$$
$$-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\left\{\psi_0(s)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(t,s;\lambda_0)\psi_0(t)dt\right\}ds=\psi_0(x),$$

這卽顯露出方程(10)有解,且這個解等於

$$\psi_0(x)+\lambda_0\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda_0)\psi_0(s)ds。$$

由於這個矛盾,正確地證明了我們的斷言。

解核旣是 λ 的半純函數,它就能夠表爲兩個整函數的商。我們將建立關於解核的這樣形式。

在(9)中令 $x=s$,且逐項積分,則有等式:

$$\int_a^b \Gamma(s,s;\lambda)ds=\int_a^b \Gamma'(s,s;\lambda)ds+$$
$$+\frac{1}{D_R(\lambda)}\sum_{k,m=1}^{n}\Delta_{mk}(\lambda)\int_a^b a_k(s)\tilde{b}_m(s)ds。 \tag{12}$$

我們將證含在最後等式的右端中的和等於 $-D_R'(\lambda)$。對於 $D_R(\lambda)$ 求微商(§4 中(6)式),則有

$$D_R'(\lambda)=-\sum_{k,m=1}^{n}a_{mk}\Delta_{mk}-\lambda\sum_{k,m=1}^{n}\frac{da_{mk}}{d\lambda}\Delta_{mk}。$$

其次,回憶 $\tilde{b}_i(s)$ 的定義,有

$$\sum_{k,m=1}^{n}\Delta_{mk}\int_a^b \tilde{b}_m(s)a_k(s)ds=\sum_{k,m=1}^{n}\Delta_{mk}\int_a^b b_m(s)a_k(s)ds+$$

$$+\lambda\sum_{k,m=1}^{n}\Delta_{mk}\int_a^b\int_a^b b_m(t)a_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)dt\,ds=$$

$$=\sum_{k,m=1}^{n}a_{mk}\Delta_{mk}+\lambda\sum_{k,m=1}^{n}\Delta_{mk}\int_a^b\int_a^b b_m(t)a_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)dt\,ds。$$

我們祇須證明

$$\int_a^b\int_a^b b_m(t)a_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)ds\,dt=\frac{da_{mk}}{d\lambda}。\qquad(13)$$

應注意的(§5), b_m 不依賴於 λ, 且

$$a_k(x)=\alpha_k(x)+\lambda\int_a^b\Gamma'(x,\tau;\lambda)\alpha_k(\tau)d\tau;\quad \alpha_k(\tau)=\cos\frac{k\pi\tau}{b-a}。$$

於是

$$a_{mk}=\int_a^b b_m(s)\alpha_k(s)ds+\lambda\int_a^b\int_a^b b_m(s)\alpha_k(t)\Gamma'(s,t;\lambda)dt\,ds,\qquad(14)$$

$$\int_a^b\int_a^b b_m(t)a_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)dt\,ds=\int_a^b\int_a^b b_m(t)\alpha_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)dt\,ds+$$

$$+\lambda\int_a^b\int_a^b\int_a^b b_m(t)\alpha_k(\tau)\Gamma'(t,s;\lambda)\Gamma'(s,\tau;\lambda)ds\,dt\,d\tau。\qquad(15)$$

三重積分具有下形式

$$\int_a^b\int_a^b b_m(t)\alpha_k(\tau)dt\,d\tau\int_a^b\Gamma'(t,s;\lambda)\Gamma'(t,\tau;\lambda)ds。$$

由解核的微積分方程(5),最內部的一個積分等於 $\dfrac{\partial\Gamma'(t,\tau;\lambda)}{\partial\lambda}$,而(15)式變爲下形式:

$$\int_a^b\int_a^b b_m(t)a_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)dt\,ds=\int_a^b\int_a^b b_m(t)\alpha_k(s)\Gamma'(t,s;\lambda)dt\,ds+$$

$$+\lambda\int_a^b\int_a^b b_m(t)\alpha_k(\tau)\frac{\partial\Gamma'(t,\tau;\lambda)}{\partial\lambda}dt\,d\tau。\qquad(16)$$

將還式和(14)式比較,我們可肯定(13)式的正確性。

現在有

$$\int_a^b\Gamma(s,s;\lambda)ds=\int_a^b\Gamma'(s,s;\lambda)ds-\frac{D_R'(\lambda)}{D_R(\lambda)}。\qquad(17)$$

(17)式的右端第一項在圓$|\lambda|\leqslant R$內是全純函數。設λ'是行列式$D_R(\lambda)$的m'次根，且此根也在圓內。(17)式指出λ'是函數

$$\delta(\lambda)=\int_a^b\Gamma(s,s;\lambda)ds$$

的一級極點，且殘數等於$-m'$。於是推知當R改變時，$D_R(\lambda)$雖然隨同改變，但它的根的次數保持不變。其次，從(17)式的形式半純函數$\delta(\lambda)$僅有一級極點，這些極點是與核$K(x,s)$的特徵值相同的，這些極點的殘數都是負整數。於是函數

$$D(\lambda)=e^{-\int_0^\lambda\delta(\lambda)d\lambda} \tag{18}$$

是一個整函數；它在圓$|\lambda|\leqslant R$內的零點是與$D_R(\lambda)$的零點相同，且也有相同的次數，此處R是任意正數。因之從(9)式，下乘積

$$D(x,s;\lambda)=D(\lambda)\Gamma(x,s;\lambda) \tag{19}$$

在圓$|\lambda|\leqslant R$內是全純函數；因R是任意的，則$D(x,s;\lambda)$是λ的整函數。於是得出解核是兩個整函數的商的形式

$$\Gamma(x,s;\lambda)=\frac{D(x,s;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{20}$$

並且解核的極點是與分母的零點相同。

若$|\lambda|<\dfrac{1}{B}$，則

$$\delta(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\lambda^{n-1},$$

其中A_n是核$K(x,s)$的跡。於是

$$D(\lambda)=e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\lambda^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)k}{k!}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\lambda^n\Big)^k。 \tag{21}$$

將最後級數變爲λ的冪級數，則我們得到的級數在全平面上是收斂的。因$D(\lambda)$是整函數，這個推論是很明顯的。

定理 解核的分子和分母都可用在λ全平面上爲收斂的弗列德和蒙級數表達之

$$D(x, s; \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x, s)\lambda^n, \tag{22}$$

$$D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}c_n\lambda^n, \tag{23}$$

其中

$$B_0(x, s)=K(x, s),$$

$$B_n(x, s)=\int_a^b\cdots\int_a^b \Delta_n(x, s)dt_1dt_2\cdots dt_n, \tag{24}$$

且

$$\Delta_n(x, s)=\begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,t_1) & K(x,t_2) & \cdots K(x,t_n) \\ K(t_1,s) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \cdots K(t_1,t_n) \\ K(t_2,s) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \cdots K(t_2,t_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ K(t_n,s) & K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \cdots K(t_n,t_n) \end{vmatrix} \tag{24_1}$$

$$c_0=1,$$

$$c_n=\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n。 \tag{25}$$

首先我們證明 $B_n(x, s)$ 和 c_n 之間有下關係

$$c_{n+1}=\int_a^b B_n(s, s)ds, \tag{26}$$

$$B_n(x, s)=c_nK(x, s)-n\int_a^b K(x, t)B_{n-1}(t, s)dt。 \tag{27}$$

等式(26)是很明顯的。爲了證明(27)，將行列式(24_1)按第一行展開：

$$B_n(x, s)=K(x, s)c_n+\sum_{\alpha=1}^{n}\int_a^b\cdots\int_a^b(-1)^{\alpha}K(x,t_{\alpha})\Delta_{\alpha}(s)dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

其中

$$\Delta_{\alpha}=\begin{vmatrix} K(t_1,s) & K(t_1,t_1) & \cdots & K(t_1,t_{\alpha-1}) & K(t_1,t_{\alpha+1}) & \cdots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,s) & K(t_2,t_1) & \cdots & K(t_2,t_{\alpha-1}) & K(t_2,t_{\alpha+1}) & \cdots & K(t_2,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n,s) & K(t_n,t_1) & \cdots & K(t_n,t_{\alpha-1}) & K(t_n,t_{\alpha+1}) & \cdots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}。$$

在關於指標是 α 的總和中，將第 α 列的元素移到第一列的位置，則須將行列式乘以因子 $(-1)^{\alpha-1}$；再將積分中的變數按下表

$$\begin{matrix} t_\alpha, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_{\alpha-1}, & t_{\alpha+1}, & \cdots, & t_n \\ t, & t_1, & t_2, & \cdots, & t_{\alpha-1}, & t_\alpha, & \cdots, & t_{n-1} \end{matrix}$$

變換之，使上行的變數代為下行的相當變數。經這樣變換以後，可使和中的 n 個積分變為相等，於是我們得到（參閱 (24_1)）

$$B_n(x,s)=c_nK(x,s)-n\int_a^b K(x,t)dt\int_a^b\cdots\int_a^b \varDelta_{n-1}(t,s)dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}=$$

$$=c_nK(x,s)-n\int_a^b K(x,t)B_{n-1}(t,s)dt_\circ$$

從(26)及(27)，可得到介於係數 c_n 之間的一個遞推關係。在(27)中令 $x=s$ 且自 a 至 b 取積分。於是有

$$c_{n+1}=c_nA_1-n\int_a^b\int_a^b K(s,t)B_{n-1}(t,s)ds\,dt_\circ$$

在這個式中代入由(27)得出的 B_{n-1}，則很容易將它寫作下形式

$$c_{n+1}=c_nA_1-nc_{n-1}A_2+n(n-1)\int_a^b\int_a^b K_2(s,t)B_{n-2}(t,s)ds\,dt_\circ$$

繼續施行這樣運算，我們得到下關係式

$$c_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!\,A_{n-k+1}}{k!}\,c_{k\circ} \tag{28}$$

現在不難求得 $D(\lambda)$ 關於 λ 乘冪的無窮級數展開式。設

$$D(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n\lambda^n,\quad \gamma_n=(-1)^nD^{(n)}(0)_\circ$$

從(18)，有

$$D'(\lambda)=-\delta(\lambda)D(\lambda)_\circ$$

對於這個式子，應用萊布尼茨公式微分 n 次，則得

$$D^{(n+1)}(0)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\delta^{(n-k)}(0)D^{(k)}(0),$$

或
$$\gamma_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!\,A_{n-k+1}}{k!}\,\gamma_{k\circ}$$

於是 γ_{n+1} 和 c_{n+1} 適合相同遞推關係。此外，$\gamma_0=c_0=1$。故對於任一 n，有 $\gamma_n=c_n$。於是整函數 $D(\lambda)$ 可以級數(23)表之，因而此級數在 λ 平面上任何有限區域內是收斂的。

今轉向函數 $D(x, s; \lambda)$。在關於解核的積分方程中，將解核代作

$$\Gamma(x,s;\lambda)=\frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)},$$

則 $D(x, s; \lambda)$ 滿足下方程

$$D(x, s; \lambda)-\lambda\int_a^b K(x,t)D(t,s;\lambda)dt=K(x,s)D(\lambda)。\qquad (29)$$

解這個方程，而將它的解看作 λ 乘冪的無窮級數形式：

$$D(x, s; \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\beta_n(x, s)}{n!}\lambda^n。$$

將此式代入(29)，且使 λ 的次數相同的係數相等，我們得到關於 $\beta_n(x,s)$ 的遞推關係：

$$\beta_0(x, s)=K(x, s)$$

$$\beta_n(x,s)=c_nK(x,s)-n\int_a^b K(x,t)\beta_{n-1}(t,s)dt。$$

以此與(27)比較，則立得 $\beta_n(x, s)=B_n(x, s)$。於是(22)式得到證明。由於 $D(x, s; \lambda)$是 λ 的整函數，故級數(22)在全平面上是收斂的。

附註 係數 $B_n(x, s)$ 和 c_n 可從遞推關係(26)和(27)決定之，因而可避免在(24)及(25)中的行列式的積分的計算。

級數(22)和(23)是由弗列德和蒙氏首先得到的。在核是有界函數的假設下，弗列德和蒙氏曾證明這兩個級數在 λ 平面上的任何有限區域內是收斂的。弗列德和蒙氏的證明是以阿達馬氏有關於行列式的估值一個著名定理❶作基礎的。卡爾邁氏[15a]僅在下積分

$$\int_a^b\int_a^b |K^2(x, s)|\,dx\,ds$$

❶ 阿達馬氏定理和弗列德和蒙氏的證明，見於一般積分方程的論著中。例如，[2]，[5]和[7]。

是一有限值的假設下,曾證明級數(22)和(23)表示 λ 的整函數。卡爾邁定理的其他證明見於我的論文[27n]。這篇論文的要點,是當方程的核適合 §2 中不等式(1)和(1_1)時而研究較特殊的情況。最後,伊茨柯維奇氏[41]曾用較卡爾邁氏更廣泛的條件來證明級數(22)和(23)在 λ 平面上的任何有限區域內是收斂的。

函數 $D(\lambda)$ 常叫做弗列德和蒙行列式,而 $D(x, s; \lambda)$ 叫做弗列德和蒙一級子式。弗列德和蒙氏曾引用任意級子式的概念,這個子式也是級數,它的構成是和(22)及(23)相似的。因在此不需要,故本書將不討論。

例 求下核 $K(x, s)=x+s$

的解核。

我們有 $c_0=1$, $B_0(x, s)=x+s$。其次,有

$$c_1=\int_0^1 2s\,ds=1。$$

$$B_1(x, s)=x+s-\int_0^1 (x+t)(t+s)dt=\frac{1}{2}(x+s)-xs-\frac{1}{3},$$

$$c_2=\int_0^1\left(s-s^2-\frac{1}{3}\right)ds=-\frac{1}{6},$$

$$B_2(x, s)=-\frac{1}{6}(x+s)-2\int_0^1(x+t)\left[\frac{1}{2}(t+s)-ts-\frac{1}{3}\right]dt=0。$$

既然 $B_2(x, s)\equiv 0$,則從(26)和(27)可見 $c_3, c_4, \cdots, B_3, B_4, \cdots$ 皆為零,於是我們得到:

$$D(x,s;\lambda)=x+s-\left[\frac{1}{2}(x+s)-xs-\frac{1}{3}\right]\lambda,$$

$$D(\lambda)=1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12},$$

$$\Gamma(x, s; \lambda)=\frac{x+s-\left[\frac{1}{2}(x+s)-xs-\frac{1}{3}\right]\lambda}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}。$$

關於近似解的收斂性的附註 應用逐次迫近法,可得到按 λ 升冪

的無窮級數形式的解。若表示解核的λ冪級數在圓$|\lambda|<R$內是收斂的,則由逐次迫近法所得的級數在這圓內顯然也是收斂的。但從複變函數論中一般定理,表示解核的冪級數在圓$|\lambda|<|\lambda_1|$內是收斂的,此處$|\lambda_1|$是一切特徵值的模的最小者。由此逐次迫近級數在同圓內也是收斂的。從上面所述顯示出下結果

若在某一圓$|\lambda|\leqslant R$內沒有特徵值,則逐次迫近級數在這個圓內是收斂的。

§10. **弱奇性方程** 我們回憶一下,所謂弱奇性方程就是它的核具有下形式

$$K(x, s)=\frac{H(x, s)}{|x-s|^{\alpha}},$$

其中$0<\alpha<1$,且$H(x, s)$是一個有界函數。或者若在n維空間的有限區域Ω內取積分,則

$$K(M, M_1)=\frac{H(M, M_1)}{r^{\alpha}},\quad 0<\alpha<n, \tag{1}$$

其中M及M_1為Ω內的任意二點,r為這二點間的距離。關於弱奇性方程的理論和弗列德和蒙方程的理論幾乎是完全相同的。在特別情況,我們將示明弗列德和蒙諸定理以及弗列德和蒙交比定理對於弱奇性方程皆保持有效。我們將對於n維空間的有限區域Ω來研究,因為這個情況在應用上是很有益的,且在弱奇性方程的基本理論的構成和證明方面空間的維數是起了某些作用的。現在我們述下面的定理:

定理1. 設

$$|K(M, M_1)|<\frac{A_1}{r^{\alpha}},\quad |L(M, M_1)|<\frac{A_2}{r^{\beta}},$$

其中A_1及A_2是常數,且$0\leqslant\alpha\leqslant n$; $0\leqslant\beta\leqslant n$。則對於核

$$N(M, M_1)=\int_{\Omega} K(M, M_2)L(M_2, M_1)dM_2$$

有下面估計

$$|N(M, M_1)| < \begin{cases} C, & \text{當 } \alpha+\beta<n, \\ C|\ln r|, & \text{當 } \alpha+\beta=n \\ \dfrac{C}{r^{\alpha+\beta-n}}, & \text{當 } \alpha+\beta>n, \end{cases} \qquad (2)$$

其中C是常數。

以 r_0 表示距離 MM_2，以 r_1 表示距離 M_1M_2，且以h表示不小於Ω的直徑的任一值。則有

$$|N(M, M_1)| \leqslant A_1A_2\int_\Omega \frac{dM_2}{r_0^\alpha r_1^\beta} < A_1A_2\int_{r_0<h} \frac{dM_2}{r_0^\alpha r_1^\beta}。 \qquad (3)$$

若 $\alpha+\beta<n$，則(3)中的積分是一致收斂的，因之是一有限值，故證得(2)中當$\alpha+\beta<n$的情況。現在設$\alpha+\beta\geqslant n$。暫設M點是原點，且引經過M_1點的一條直線作爲坐標軸x_1，使從M至M_1的方向是正向。於是M及M_1二點的坐標分別是$(0, 0, \cdots, 0)$及$(r, 0, 0, \cdots, 0)$。以$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示M_2點的坐標。則有

$$r_0^2=\sum_{k=1}^n x_k^2, \quad r_1^2=(x_1-r)^2+\sum_{k=2}^n x_k^2。$$

將(3)中的積分作變換 $x_k=r\xi_k$，$k=1, 2, \cdots, n$。則不等式(3)變爲下形式：

$$|N(M, M_1)| < \frac{A_1A_2}{r^{\alpha+\beta-n}}\int_{\rho<\frac{h}{r}} \frac{d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n}{\rho^\alpha\left[(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{k=2}^n \xi_k^2\right]^{\frac{\beta}{2}}}。 \qquad (4)$$

此處 $\rho=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n \xi_k^2}$。現在對(4)中的積分作一個估計。我們有

$$d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n=\rho^{n-1}d\rho\, dS,$$

其中dS是在坐標爲$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$的空間內的單位超越球面上的面積元素。其次

$$(\xi_1-1)^2+\sum_{k=2}^n \xi_k^2=\rho^2-2\xi_1+1\geqslant(\rho-1)^2。$$

當 $\rho>2$ 時，不難推知$(\rho-1)^2>\frac{1}{4}\rho^2$，於是有

$$(\xi_1-1)^2+\sum_{k=2}^{n}\xi_k^2>\frac{1}{4}\rho^2。$$

現在,有

$$|N(M,M_1)|<\frac{A_1A_2}{r^{\alpha+\beta-n}}\left\{\int_{\rho<2}\frac{\rho^{n-1-\alpha}d\rho\,dS}{\left[(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{k=2}^{n}\xi_k^2\right]^{\frac{\beta}{2}}}+\right.$$
$$\left.+2^\beta\int_{2<\rho<\frac{h}{r}}\rho^{n-1-\alpha-\beta}\,d\rho\,dS\right\}。\qquad(5)$$

圓括弧內第一個積分是一常數,而當 $\alpha+\beta>n$ 時,第二個積分小於

$$2^\beta S\int_2^\infty\frac{d\rho}{\rho^{\alpha+\beta+1-n}}=\frac{2^{n-\alpha}S}{\alpha+\beta-n},$$

其中 S 是單位超越球面的面積。於是(5)中圓括弧內的兩積分之和小於某一個常數,因之(2)中當 $\alpha+\beta>n$ 的情況得以證明。最後,若 $\alpha+\beta=n$,則(5)中圓括弧內第二個積分等於

$$2^\beta S\int_2^{\frac{h}{r}}\frac{d\rho}{\rho}=2^\beta S\ln\frac{h}{2r},$$

由此得到(2)中關於這個情況的證明❶。

系 如果核是弱奇性型的,則從某一個疊核以後的一切疊核皆是有界的。

若核適合不等式(1),從定理1,則對於它的 m 次疊核有下估計

$$|K_m(M,M_1)|<\begin{cases}\dfrac{C_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}}, & \text{當 } m\alpha-(m-1)n>0 \text{ 時},\\ C_m\quad, & \text{當 } m\alpha-(m-1)n<0 \text{ 時},\end{cases}$$

其中 C_m 是一個常數。於是,若

$$m>\frac{n}{n-\alpha}\qquad(6)$$

則 $K_m(M,M_1)$ 是有界函數。

由此可見若指標 m 是適合不等式(6)的任一整數,則核 $K_m(M,$

❶ 參考斯.爾.索波列夫:數學物理方程,國家技術出版社,1947,第233—237頁。

M_1)是有界函數。

茲引用下面的記號。對於任一函數 $\varphi(M)$ 用 $E\varphi$ 表之,如

$$E\varphi=\varphi(M)。$$

例如,我們可寫下式

$$\varphi(M)-\lambda\int_\Omega K(M,M_1)\varphi(M_1)dM_1=(E-\lambda K)\varphi。$$

若將這個記號 E 看作1,則含有算子 K 的乘冪的幾個多項式相乘,可看作是尋常多項式相乘。例如

$$(E-\lambda K)(E+\lambda K)\varphi=(E-\lambda^2K^2)\varphi=$$

$$=\varphi(M)-\lambda^2\int_\Omega K_2(M,M_1)\varphi(M_1)dM_1。$$

現在討論方程

$$\varphi(M)-\lambda\int_\Omega K(M,M_1)\varphi(M_1)dM_1=f(M), \qquad (7)$$

其中 $K(M,M_1)$ 具有形式如(1)式。設 m 是適合不等式(6)的任一正整數。方程(7)可寫為

$$(E-\lambda K)\varphi=f(M)。$$

對這式的兩邊皆乘以下算子

$$(E-\varepsilon\lambda K)(E-\varepsilon^2\lambda K)\cdots(E-\varepsilon^{m-1}\lambda K)=E+\lambda K+\lambda^2K^2+$$
$$+\cdots+\lambda^{m-1}K^{m-1},$$

其中 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}$。於是我們得到核為有界的弗列德和蒙方程

$$(E-\lambda^mK^m)\varphi=(E+\lambda K+\lambda^2K^2+\cdots+\lambda^{m-1}K^{m-1})f,$$

或,更詳細的寫出,是

$$\varphi(M)-\lambda^m\int_\Omega K_m(M,M_1)\varphi(M_1)dM_1=$$

$$=f(M)+\lambda\int_\Omega K(M,M_1)f(M_1)dM_1+$$

$$+\lambda^2\int_\Omega K_2(M,M_1)f(M_1)dM_1+\cdots+$$

$$+\lambda^{m-1}\int_{\Omega}K_{m-1}(M, M_1)f(M_1)dM_1。\qquad (8)$$

顯然，方程(7)的一切解也滿足方程(8)。這個情況在以後起着很重要作用。一般言之，這情況的反面不一定正確，也就是說方程(8)可能有解不滿足方程(7)。

我們着手證明弗列德和蒙諸定理對於方程(7)是有效的。

對於特徵值的定義，略作下面的修改：如果一值 λ_0 使下面的齊次方程

$$(E-\lambda_0 K)\varphi=0$$

有不恆等於零的解，則 λ_0 叫做核 $K(M, M_1)$ 的一個特徵值。我們應注意這個定義對於弗列德和蒙型方程也適用的，從弗列德和蒙第二定理即可推知。

1°. 設 λ_0 是核 $K(M, M_1)$ 的一個特徵值，且設 λ_0 在圓 $|\lambda|\leqslant R$ 內，此處 R 爲任一正數。以 $\varphi_0(M)$ 表示與 λ_0 對應的特徵函數，因之有

$$\varphi_0(M)-\lambda_0\int_{\Omega}K(M, M_1)\varphi_0(M_1)dM_1=0。\qquad (9)$$

由上面所指示，則 $\varphi_0(M)$ 也滿足下方程

$$\varphi_0(M)-\lambda_0^m\int_{\Omega}K_m(M, M_1)\varphi_0(M_1)dM_1=0。\qquad (10)$$

這樣一來，可見 λ_0^m 是核 $K_m(M, M_1)$ 的特徵值。但後者在半徑爲 R 的圓內僅有有限個特徵值，於是核 $K(M, M_1)$ 在圓 $|\lambda|\leqslant R$ 內也僅有有限個這樣的值。弗列德和蒙第一定理得到證明。

2°. 設方程(9)及(10)分別有 r 個及 r' 個線性無關的特徵函數。因方程(9)的每一解也滿足方程(10)，故 $r\leqslant r'$。但 r' 是一有限正整數，於是 r 必然也是有限的。這就顯示出弗列德和蒙第二定理對於弱奇性方程也有效。

3°. 設(9)的共軛方程

$$(E-\bar{\lambda}_0 K^*)\psi=0\qquad (11)$$

有 r^* 個線性無關的解。今選擇 m,使下面諸數

$$\varepsilon\lambda_0,\ \varepsilon^2\lambda_0,\ \cdots,\ \varepsilon^{m-1}\lambda_0$$

中的任一數都不是核 $K(M, M_1)$ 的特徵值。這樣 m 值的選擇恆爲可能。因如果這樣的m不存在,則在圓周$|\lambda|=|\lambda_0|$上核 $K(M, M_1)$有無窮個特徵值,這就違背了弗列德和蒙第一定理。當m選定後,方程(9)及(10)是等價的。爲了證明這個事實,將(10)寫作下形式

$$(E-\varepsilon\lambda_0K)\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0K)\varphi_0=0。$$

今引用下記號

$$\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0K)\varphi_0=\varphi_1(M)。$$

於是有

$$(E-\varepsilon\lambda_0K)\varphi_1=0,$$

因 $\varepsilon\lambda_0$ 不是特徵值,則 $\varphi_1(M)=0$,或

$$\prod_{\alpha=2}^{m}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0K)\varphi_0=0。$$

現在再令 $\prod_{\alpha=3}^{m}(E-\varepsilon^{\alpha}\lambda_0K)\varphi_0=\varphi_2(M)$, 同樣可證明 $\varphi_2(M)=0$。繼續這手續有限次以後,我們得到

$$(E-\varepsilon^{m}\lambda_0K)\varphi_0=(E-\lambda_0K)\varphi_0=0,$$

這就是方程(9)。

因方程(9)及(10)是等價的,故後者的線性無關的解的個數也等於 r。由於弗列德和蒙第三定理,則方程(10)的共軛方程

$$(E-\bar{\lambda}_0^{m}K^{*m})\omega=0 \tag{12}$$

也有相同個數線性無關的解。但這個最後方程可寫作下形式

$$(E-\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0K^*)(E-\bar{\varepsilon}^2\bar{\lambda}_0K^*)\cdots(E-\bar{\varepsilon}^{m-1}\bar{\lambda}_0K^*)(E-\bar{\lambda}_0K^*)\omega=0,$$

這方程有不少於 r^* 個線性無關的解,於是 $r^*\leqslant r$。

應用和上面完全相同的方法,可證 $r^*\geqslant r$。最後有 $r^*=r$, 此即符合弗列德和蒙第三定理的結果。

4°. 今轉而討論弗列德和蒙第四定理。必要條件的證明完全與§8相同，此處僅須證條件是充分的。和前面一樣，我們選擇 m，使 $\varepsilon\lambda_0, \varepsilon^2\lambda_0, \cdots, \varepsilon^{m-1}\lambda_0$ 皆不是核 $K(M, M_1)$ 的特徵值。於是方程(7)及(8)是等價的。這個事實的證明是與證明(9)及(10)為等價相似的，僅須令

$$\varphi_k(M) = \prod_{\alpha=k+1}^{m} (E-\varepsilon^\alpha\lambda_0 K)[(E-\lambda_0 K)\varphi - f],$$

因此僅須闡明方程(8)有解的充分條件。由弗列德和蒙第四定理，如果

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{m-1} (E-\varepsilon^\alpha\lambda_0 K)f, \omega\right)=0, \tag{13}$$

則方程(8)有解，其中 ω 表示方程(12)的任一解。我們將條件(13)改變作下形式。令 $\prod\limits_{\alpha=2}^{m-1} (E-\varepsilon^\alpha\lambda_0 K)f = f_1$，則有

$$0=((E-\varepsilon\lambda_0 K)f_1, \omega)=(f_1, \omega)-\varepsilon\lambda_0(Kf_1, \omega),$$

或由 §8 公式(6)，有

$$0=(f_1, \omega)-\varepsilon\lambda_0(f_1, K^*\omega)=(f_1, (E-\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0 K^*)\omega)=$$

$$=\left(\prod_{\alpha=2}^{m-1} (E-\varepsilon^\alpha\lambda_0 K)f, (E-\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}_0 K^*)\omega\right)。$$

現在令 $\prod\limits_{\alpha=3}^{m-1} (E-\varepsilon^\alpha\lambda_0 K)f = f_2$，依此類推。繼續這樣運算，我們可將(13)寫作下形式

$$\left(f, \prod_{\alpha=1}^{m-1} (E-\bar{\varepsilon}^\alpha\bar{\lambda}_0 K^*)\omega\right)=0。 \tag{14}$$

現在將方程(12)寫作下形狀：

$$\prod_{\alpha=0}^{m-1} (E-\bar{\varepsilon}^\alpha\bar{\lambda}_0 K^*)\omega=(E-\bar{\lambda}_0 K^*)\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\bar{\varepsilon}^\alpha\bar{\lambda}_0 K^*)\omega=0。$$

由此可見在(14)中的數量積的第二因子是方程(11)的一解，而方程(11)是方程(7)的共軛方程。於是，為了要方程(8)有解及它與方程(7)的等價性，只須 $f(M)$ 與方程(11)的某些解是正交的，而這些解的形式

是 $\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*)\omega$，此處 $\omega(M)$ 是方程(12)的解。這就足夠證明了 $f(M)$ 與方程(11)的一切解是正交的。

這樣我們就完成了弗列德和蒙第四定理對於弱奇性方程的證明。

附註 1. 不難證明方程(11)的一切解有下形式

$$\psi(M)=\prod_{\alpha=1}^{m-1}(E-\bar{\varepsilon}^{\alpha}\bar{\lambda}_0 K^*)\omega,$$

其中 $\omega(M)$ 滿足方程(12)。

附註 2. 在弗列德和蒙諸定理對於弱奇性方程的證明中，僅用一個限制條件，也就是從某一個疊核以後的一切疊核是有界的。至於核(1)的形式的概念在證明中未曾涉及。這就說明了弗列德和蒙諸定理對於任何積分方程均有效，祇須這方程的核從某一個疊核以後的一切疊核是有界函數。

如果 λ 不是方程(7)的特徵值，則這樣的 λ 叫做正則值。若 λ 是一個正則值，我們可證明方程(7)有解，且這解是唯一的。事實上，在這樣情況下，齊次方程

$$\psi(M)-\bar{\lambda}\int_{\Omega}\overline{K(M_1, M)}\psi(M_1)dM_1=0 \qquad (15)$$

僅有零解；於是弗列德和蒙條件對於任意函數 $f(M)$ 自然滿足，因之證實了方程(7)的可解性。又因方程(15)沒有不為零的解，故方程(7)有唯一解。

第二章 對稱方程
(希爾伯脫-施密特定理)

§11. 對稱核 一個核如果與它的共軛核相同，則這樣的核叫做對稱核。這樣核的特徵就是下面恆等式的成立

$$K(x, s)=\overline{K(s, x)} \tag{1}$$

如果核是實函數，則下面的等式

$$K(x, s)=K(s, x) \tag{2}$$

就是它的對稱性的定義。

有對稱核的積分方程叫做對稱方程。

如果核是對稱的，則很容易證明它的一切疊核也是對稱的。

例如，

$$K_2(x, s)=\int_a^b K(x, t)K(t, s)dt=\int_a^b \overline{K(s, t)}\,\overline{K(t, x)}\,dt=\overline{K_2(s, x)},$$

$$K_3(x, s)=\int_a^b K_2(x, t)K(t, s)dt=\int_a^b \overline{K(s, t)}\,\overline{K_2(t, x)}dt=\overline{K_3(s, x)},$$

依此類推。

例 核 $x+s$, $\ln|x-s|$, $i(x-s)$ 皆是對稱的。核 $i(x+s)$ 則不是對稱的，因在這情況，有

$$\overline{K(s, x)}=-K(x, s)。$$

在對稱核的情況，§8 中(6)式變爲

$$(K\varphi, \psi)=(\varphi, K\psi), \tag{3}$$

在實質上，對稱核這個基本性質，決定了關於對稱積分方程的一切理論。

在下面的一列函數

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots \tag{4}$$

中,如果任意兩個函數是正交的,則這個敍列稱爲正交敍列。如果一敍列是正交的,且其中任一函數的模都等於 1,則謂這個敍列成一正交標準系。於是,若敍列(4)是一正交標準系,則有

$$(\varphi_i,\ \varphi_k)=\begin{cases}0, & \text{當}\quad i\neq k,\\ 1, & \text{當}\quad i=k。\end{cases}$$

我們很容易將任一正交系變作正交標準系,只須將每一函數用它自己的模除之。

從任一正交標準系出發,可能建立與三角級數的理論相類似的"富里耶級數"的理論。我們對這個理論作簡略的敍述。

對於任一函數 $f(x)$ ❶,我們可能提出下面問題:如何選擇係數 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使下面的近似式

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$$

的平方均值誤差爲最小。由定義,平方均值誤差等於

$$\delta_n=\int_a^b\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right|^2dx。$$

我們引用下記號

$$a_k=(f,\ \varphi_k)=\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx。$$

常數 a_k 叫做函數 $f(x)$ 關於正交標準系(4)的富里耶係數。經過簡單變化,則有:

$$\delta_n=\int_a^b|f^2(x)|dx+\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k-a_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2。$$

於是可見若 $\alpha_k=a_k$, 也就是選擇係數 α_k 爲 $f(x)$ 的富里耶係數,則 δ_n 將爲最小。最小值 δ_n 等於

$$\int_a^b|f(x)|^2dx-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2。\qquad(5)$$

❶ 我們僅設 $f(x)$ 和它的平方皆爲絕對可積。

因這個值不能爲負，則有

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\leqslant\|f\|^2。$$

上不等式的左邊，是正項級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$$

的部分和，而不等式指出這級數的一切部分和是有界的。從而證明上級數是收斂的，且有下面不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant\|f\|^2。\tag{6}$$

這個不等式叫做貝塞爾不等式。

使近似式中的 n 增至無窮大，我們得到函數 $f(x)$ 的富里耶級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,\varphi_k(x)。\tag{7}$$

如果級數(7)是收斂的，且其和等於 $f(x)$，則謂 $f(x)$ 可展爲關於 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots,$ 的富里耶級數。如果 $f(x)$ 可展爲一致收斂的富里耶級數(7)，則有下關係

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2=\|f\|^2,\tag{8}$$

我們稱上式爲帕爾斯窪爾等式。事實上，當 n 爲充分大時，則有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)-f(x)\right|^2<\varepsilon,$$

其中 ε 是任意正數。於是

$$\delta_n^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2<\varepsilon(b-a)。$$

令 $\varepsilon\to0$，因之 $n\to\infty$，我們得到帕爾斯窪爾等式。

關於級數(7)，我們提出兩個基本問題：在什麼條件下，這個級數是收斂的？如果它是收斂的，則它的和是否卽爲 $f(x)$？在一般情況，第一問題的解答有極大困難，然在實際重要場合中，我們簡單地用富里耶級數的一致收斂性作爲充分條件常常獲得成功。

今進入第二問題。如果有一個函數存在，這函數不恆等於零且與正交系中的一切函數是正交的，則謂這個正交系是不完備的。反之，則謂正交系是完備的。例如，在區間 $(-\pi, \pi)$ 內的下列正交系

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots$$

是不完備的，因 $\varphi(x)\equiv 1$ 與這系中的一切函數成正交。在三角級數的理論中，示知在 $(-\pi, \pi)$ 內的下列正交系

$$1,\ \cos x, \sin x, \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots$$

是完備的。

如果(4)是完備正交系，且級數(7)是一致收斂的，則它的和等於 $f(x)$。我們進入這個簡單而重要命題的證明。令

$$\omega(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)-f(x)。$$

因級數(7)是一致收斂的，因此它可以逐項求積分。於是數量積 (ω, φ_k) 是

$$(\omega,\ \varphi_k)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi_n,\ \varphi_k)-(f,\ \varphi_k)=a_k-a_k=0\ 。$$

於是 $\omega(x)$ 與一切函數 $\varphi_k(x)$ 是正交的。但正交系(4)是完備的，故 $\omega(x)\equiv 0$。因此有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)=f(x)。$$

於此應指出如果正交系(4)是完備的，則對於任何函數 $f(x)$，貝塞爾不等式變爲帕爾斯窪爾等式。

對於更廣泛情況的富里耶級數，我們也作一些補充說明。設 $r(x)$ 是一個不爲負的函數。若

$$\int_a^b r(x)\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx=0, \tag{9}$$

則謂 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是帶權 $r(x)$ 的正交函數。如果有下關係：

$$\int_a^b r(x)\varphi_i(x)\overline{\varphi_k(x)}dx=\begin{cases}0, & \text{當}\quad i\neq k,\\ 1, & \text{當}\quad i=k,\end{cases} \tag{10}$$

則謂系(4)是帶權 $r(x)$ 的正交標準系。

完全與上述相同，我們引出函數 $f(x)$ 關於帶權的正交標準系 $\varphi_k(x)$ 的富里耶級數的概念。$f(x)$ 的富里耶係數由下式確定

$$a_k=\int_a^b r(x)f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx; \tag{11}$$

貝塞爾不等式和帕爾斯窪爾等式有下形式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\leqslant\int_a^b r(x)|f(x)^2|dx, \tag{12}$$

和

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2=\int_a^b r(x)|f(x)|^2 dx。 \tag{13}$$

至於完備性的概念和由這個概念所產生的結論，都能毫無例外地推廣到這個情況。

關於正交系我們舉出幾個例子。

(a)系 $\varphi_k(x)=e^{ikx}$，其中 k 取 0 及一切正負整數，則此系在 $(-\pi,\pi)$ 內是一正交系。但它不是標準系，因

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_k(x)|^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi。$$

顯然下列函數

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx},\ k=\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

在 $(-\pi,\pi)$ 內是正交標準系。

(б)下列函數

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cdots$$

構成在區間 $(0,\pi)$ 內的一個正交系。在同區間內，$\sin kx$, $k=1,2,3,\cdots$ 也構成一正交系。

(в)勒讓德多項式

$$P_0(x)=1,\ P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n=1,2,3,\cdots$$

在區間 $(-1,1)$ 內構成正交系。它們滿足下關係

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_k(x)dx=\begin{cases} 0, & 當\quad i\neq k, \\ \dfrac{2}{2k+1}, & 當\quad i=k。\end{cases}$$

(г)且比謝夫多項式

$$T_k(x)=\frac{1}{2^{k-1}}\cos(k\arccos x),\quad k=1,2,3,\cdots,$$

在區間 $(-1,1)$ 內是帶權

$$r(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

的正交系。如果將 $T_k(x)$ 乘以 $\sqrt{\dfrac{2^{2k-1}}{\pi}}$，則變爲正交標準系。

(д)設 $J_n(x)$ 表示貝塞爾第一類 n 級函數，且設 $\alpha_{k,n}$ 是它的正根。在計算中我們設 $n>-1$。於是下函數列

$$J_n(\alpha_{k,n}x),\quad k=1,2,3,\cdots$$

在區間 $(0,1)$ 內構成帶權 $r(x)=x$ 的正交系。這些函數滿足下關係

$$\int_{0}^{1} xJ_n(\alpha_{i,n}x)J_n(\alpha_{k,n}x)dx=\begin{cases} 0, & 當\quad i\neq k, \\ J_{n+1}^2(\alpha_{k,n}), & 當\quad i=k。\end{cases}$$

從(a)到(д)的諸函數列都是完備的。

將上面的諸正交系引導到實用問題中，將起重要的作用。這樣系的例子是非常多的。

在級數理論中，我們可能將任意一列線性無關的函數變換爲正交標準系。這個變換的方法有很重要價值，叫做**正交化法**。設 $\varphi_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$ 是一列函數（個數爲有限或可列），且 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots$，$\varphi_m(x)$ 是線性無關的，其中 m 是任意正整數。我們將可構造一個正交標準系 $\omega_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$，使 $\omega_m(x)$ 表爲 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots$，$\varphi_m(x)$ 的線性式；反之，使 $\varphi_m(x)$ 表爲 $\omega_1(x)$，$\omega_2(x)$，$\cdots$，$\omega_m(x)$ 的線性式。

因零與任何一系函數是線性相關的，故可設 $\varphi_1(x)$ 不恆等於零。

在這情況，$\varphi_1(x)$ 的模是一個正數。令

$$\psi_1(x)=\varphi_1(x),\quad \omega_1(x)=\frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|},$$

於是 $\omega_1(x)$ 已經標準化。今設需要求的正交標準系中前 $m-1$ 個函數 $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_{m-1}(x)$ 已經構造好了。令

$$\psi_n(x)=\varphi_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1} a_k\omega_k(x),$$

且選擇 a_k 使 $\psi_n(x)$ 與 $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_{n-1}(x)$ 都是正交的：

$$(\varphi_n, \omega_j)-\sum_{k=1}^{n-1} a_k(\omega_k, \omega_j)=0,\quad j=1, 2, \cdots n-1。$$

但

$$(\omega_k, \omega_j)=\begin{cases}0, & 當\ k\neq j,\\ 1, & 當\ k=j,\end{cases}$$

從最後等式，則得到 $a_j=(\varphi_n, \omega_j)$。

函數 $\psi_n(x)$ 不恆等於零，否則 $\varphi_n(x)$ 是 $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_{n-1}(x)$ 的線性式，從而也是 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{n-1}(x)$ 的線性式，與假設矛盾。現在只須令

$$\omega_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}。$$

於是按上法，一個正交標準系 $\omega_n(x)$, $n=1, 2, \cdots$ 已經構成了，且 $\omega_n(x)$ 是 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 的線性式。反之，$\varphi_n(x)$ 也是 $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_n(x)$ 的線性式，因爲

$$\varphi_n(x)=\|\psi_n\|\omega_n(x)+\sum_{k=1}^{n-1}(\varphi_n, \omega_k)\omega_k(x)。$$

§12. 關於對稱方程的基本定理。

定理1. 如果核是對稱的且不恆等於零，則它至少有一個特徵值。

這個重要定理，有着幾個證明。每一個證明供給了關於特徵值的近似計算的某些基本方法。我們將在下節中詳細說明這些方法。從而指出對於不對稱核定理 1 不成立，也就是存在着無特徵值的不對稱核。

例如,渥爾特拉型方程。

定理 1 是本節定理 3 的結論,而定理 3 的證明將見於 § 20 的末段。

定理 2. 對稱核的一切特徵值都是實數。

設 λ_0 及 $\varphi_0(x)$ 是核 $K(x,s)$ 的特徵值及與 λ_0 對應的特徵函數。由定義,它們滿足下面等式

$$\varphi_0(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)ds=0 \tag{1}$$

或利用 § 8 中的記號,則是

$$\varphi_0(x)-\lambda_0 K\varphi_0=0\text{。}$$

將此式乘以 $\overline{\varphi_0(x)}$, 且自 a 至 b 取積分,我們有

$$\|\varphi_0(x)\|^2-\lambda_0(K\varphi_0,\varphi_0)=0,$$

從而得到

$$\lambda_0=\frac{\|\varphi_0(x)\|^2}{(K\varphi_0,\varphi_0)}\text{。} \tag{2}$$

(2)中的分子是一個正數;其次,由於對稱核的基本特性(§ 11 中的(3)式),有

$$(K\varphi_0,\varphi_0)=(\varphi_0,K\varphi_0)\text{。}$$

但是數量積中,如果將其因子互換,無異於將這個數量積變爲它的共軛複數,亦即

$$(\varphi_0,K\varphi_0)=\overline{(K\varphi_0,\varphi_0)}\text{。}$$

於是,有

$$(K\varphi_0,\varphi_0)=\overline{(K\varphi_0,\varphi_0)}\text{。} \tag{3}$$

既然 $(K\varphi_0,\varphi_0)$ 等於它的共軛值,則 $(K\varphi_0,\varphi_0)$ 是一個實數,於是從(2)立知 λ_0 也是實數。

定理 3. 對稱核的最小特徵值(絕對值意義的)的絕對值的倒數等於

$$|(K\varphi,\varphi)|=\left|\int_a^b\int_a^b K(x,s)\,\varphi(x)\overline{\varphi(s)}\,dx\,ds\right|, \tag{4}$$

的極大值，但 $\varphi(x)$ 須滿足條件

$$(\varphi,\varphi)=\int_a^b|\varphi^2(x)|\,dx=1。\tag{5}$$

當 $\varphi(x)$ 是與核的最小特徵值對應的特徵函數，則上面所指的極大值能夠達到。

這個定理的證明是不簡單的，且須引入一些新概念；這個證明將於本章 § 20 中述之。

定理 4. 與對稱核的不同特徵值對應的特徵函數是正交的。

設 λ_1 及 λ_2 是對稱核 $K(x,s)$ 的兩個不同特徵值，且 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 是分別與 λ_1 及 λ_2 對應的特徵函數。因此有

$$\varphi_1(x)-\lambda_1K\varphi_1=0,\quad \varphi_2(x)-\lambda_2K\varphi_2=0。$$

用 $\lambda_2\overline{\varphi_2(x)}$ 乘第一式，$\lambda_1\overline{\varphi_1(x)}$ 乘第二式，且從 a 至 b 取積分。由定理 2，λ_1 及 λ_2 皆是實數，可置於數量積記號之外，於是有

$$\lambda_2(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda_1\lambda_2(K\varphi_1,\varphi_2)=0,\tag{6}$$

$$\lambda_1(\varphi_2,\varphi_1)-\lambda_1\lambda_2(K\varphi_2,\varphi_1)=0。\tag{7}$$

在(7)中，將數量積的因子互換，且對於每一項以共軛值代之，我們得到

$$\lambda_1(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda_1\lambda_2(\varphi_1,K\varphi_2)=0,$$

或從 § 11 中(3)式，有

$$\lambda_1(\varphi_1,\varphi_2)-\lambda_1\lambda_2(K\varphi_1,\varphi_2)=0。\tag{8}$$

從(6)減(8)，則有

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\varphi_1,\varphi_2)=0。$$

但 $\lambda_2\neq\lambda_1$，因此必須 $(\varphi_1,\varphi_2)=0$。定理得以證明。

由定理 4 的關係，我們有下面的注意。設對於某個特徵值，有 n 個線性無關的特徵函數。它們的任意一個線性組合也是特徵函數。應用正交化法，從已知的 n 個線性無關函數可構造 n 個線性組合，而此 n 個函數成一個正交標準系。此外，已知的 n 個函數反過來也可是新構成

的函數的 n 個線性組合。但在對稱核的情況，它的一切特徵函數可能使其兩兩正交。事實上，對應於同一特徵值的若干個特徵函數可由於正交化法使它們成爲一個正交標準系。而對應於不同特徵值的特徵函數，由定理 4 它們是正交的。於是我們引出下定理：

定理 5．對稱核的一切特徵函數組成的敍列恆可能變爲一個正交標準系。

按照定理 5，此後我們常認爲對稱核的一切特徵函數組成的敍列是一個正交標準系。還要假設如果某一個特徵值對應於若干線性無關的特徵函數，則在特徵值敍列中，須將這個特徵值重寫相當多次，使重寫的次數等於對應的函數的個數。這樣一來，我們認爲每一特徵值僅有一個特徵函數和它對應，而諸特徵值之間可能有相等的。又設我們將諸特徵值依照它們的絕對值增加的次序排列之。如 λ_m 和 λ_n 是兩個特徵值，且 $m<n$，則 $|\lambda_m|\leqslant|\lambda_n|$。

§ 13．希爾伯脫-施密特定理。

引理 1．二次疊核的一切特徵值所成集與所設核的一切特徵值的平方所成集是相同的。

此處我們沒有核是對稱形式的假設。

(a)設 λ_0 是核 $K(x,s)$ 的特徵值，且 $\varphi_0(x)$ 是與 λ_0 對應的特徵函數。於是有 $(E-\lambda_0K)\varphi_0=0$。對於這個式子的兩邊，我們取算子 $E+$ $+\lambda_0K$，得到 $(E-\lambda_0^2K^2)\varphi_0=0$，或寫作

$$\varphi_0(x)-\lambda_0^2\int_a^b K_2(x,s)\varphi_0(s)ds=0,$$

因此 λ_0^2 是 $K_2(x,s)$ 的特徵值。

(б)設 μ_0 是 $K_2(x,s)$ 的特徵值，且 $\varphi_0(x)$ 是與 μ_0 對應的特徵函數，因此有 $(E-\mu_0K^2)\varphi_0=0$，或令 $\mu_0=\lambda_0^2$，則可寫作

$$(E-\lambda_0K)(E+\lambda_0K)\varphi_0=0\text{。}\qquad(1)$$

λ_0 可能是核 $K(x,s)$ 的特徵值。在這樣情況，引理 1 算是證明了。

現在設想這個情況不發生，也就是 λ_0 不是 $K(x,s)$ 的特徵值。設 $(E+\lambda_0 K)\varphi_0=\varphi_1(x)$，由於方程(1)，則有 $(E-\lambda_0 K)\varphi_1=0$。因 λ_0 不是 $K(x,s)$ 的特徵值，則有 $\varphi_1(x)=0$，或 $(E+\lambda_0 K)\varphi_0=0$。此最後方程指出 $-\lambda_0$ 是 $K(x,s)$ 的特徵值。引理因之證明。

附註 對於更一般的情況，也可能證明：核 $K_n(x,s)$ 的一切特徵值所成集是與所設核 $K(x,s)$ 的一切特徵值的 n 次乘冪所成集是相同的。

引理 2. 設核 $K(x,s)$ 是對稱核，且適合 §2 中不等式(1)：

$$\int_a^b |K^2(x,s)|\,ds<C_1,\ C_1=\text{常數。}$$

其次，設 $\varphi_n(x)$，$n=1,2,\cdots$ 是 $K(x,s)$ 的一切特徵函數所成的敍列，且 λ_n 是與 $\varphi_n(x)$ 對應的特徵值。於是下級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2} \tag{2}$$

是收斂的，且它的和不大於常數 C_1。

暫固定 x 值，而視 $K(x,s)$ 是變量 s 的函數。我們求出 $K(x,s)$ 關於正交標準系 $\overline{\varphi_n(s)}$，$n=1,2,\cdots$ 的富里耶級數。今以 a_n 表示這些係數，則有

$$a_n=\int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)\,ds=\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\text{。}$$

由貝塞爾不等式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n^2(x)|}{\lambda_n^2}\leqslant\int_a^b |K^2(x,s)|\,ds<C_1\text{。}$$

引理因而證明。

引理 3. 設 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1},\cdots$，是對稱核 $K(x,s)$ 的一切特徵值所成集，而 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(x),\cdots$ 是對應的特徵函數。則下面對稱核

$$K^{(n)}(x,s)=K(x,s)-\sum_{m=1}^{n}\frac{\varphi_m(x)\overline{\varphi_m(s)}}{\lambda_m}\qquad(3)$$

有特徵值 λ_{n+1}, λ_{n+2}, …, 它們是與特徵函數 $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x)$ … 對應的。而其他特徵值及特徵函數都不是 $K^{(n)}(x,s)$ 的特徵值及特徵函數。

方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K^{(n)}(x,s)\varphi(s)ds=0$$

可寫作下形式

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+\lambda\sum_{m=1}^{n}\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}(\varphi,\varphi_m)=0。\qquad(4)$$

在方程(4)的左邊,使 $\lambda=\lambda_j$ 且 $\varphi(x)=\varphi_j(x)$, 此處 $j>n$。因諸函數 $\varphi_k(x)$ 是正交的,則當 $j>m$ 時,有 $(\varphi_j,\varphi_m)=0$; 代入的結果等於

$$\varphi_j(x)-\lambda_j\int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds,$$

這個式子顯然等於零。這樣一來, λ_j 及 $\varphi_j(x)$ $(j>n)$ 皆是核 $K(x,s)$ 的特徵值及特徵函數。

現在設 λ_0 及 $\varphi_0(x)$ 是核 $K^{(n)}(x,s)$ 的特徵值及特徵函數,因此有

$$\varphi_0(x)-\lambda_0K\varphi_0+\lambda_0\sum_{m=1}^{n}\frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m}(\varphi_0,\varphi_m)=0。\qquad(5)$$

將這式乘以 $\overline{\varphi_j(x)}$, 且自 a 至 b 取積分,這次設 $j\leqslant n$。因 $\varphi_m(x)$ 是正交標準系,我們得到

$$(\varphi_0,\varphi_j)-\lambda_0(K\varphi_0,\varphi_j)+\frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0,\varphi_j)=0。\qquad(6)$$

由§11中(3)式,有 $(K\varphi_0,\varphi_j)=(\varphi_0,K\varphi_j)$。今將(6)中最後兩項併作一項,於是有

$$(\varphi_0,\varphi_j)+\frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0,\varphi_j-\lambda_jK\varphi_j)=(\varphi_0,\varphi_j)=0。$$

於是方程(5)中的和項皆消去,我們得

$$\varphi_0(x)-\lambda_0\int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)ds=0。$$

此式指出 λ_0 及 $\varphi_0(x)$ 也是核 $K(x,s)$ 的特徵值及特徵函數。因這個函數 $\varphi_0(x)$ 與一切函數 $\varphi_j(x)$ $(j\leqslant n)$ 是正交的,故 $\varphi_0(x)\neq\varphi_j(x)$, 此處 $j\leqslant n$。因而 $\varphi_0(x)$ 必須是 $\varphi_{n+1}(x)$, $\varphi_{n+2}(x)$, … 中的某一個函數,且 λ_0 必須是 $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$ 中的某一個值。

附註 設 $K(x,s)$ 僅有有限個特徵值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。於是 $K^{(n)}(x,s)$ 沒有特徵值。由 §12 定理 1, 則 $K^{(n)}(x,s)\equiv 0$。從而有

$$K(x,s)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\varphi_m(x)\overline{\varphi_m(s)}}{\lambda_m},$$

並由此推出 $K(x,s)$ 是退化核。

其次,在 §4 中我們已證明一切退化核僅有有限個特徵值。比較這兩個結果, 我們得出這樣結論: 當且僅當對稱核僅有有限個特徵值時, 這個核是退化核。

希爾伯脫-施密特定理 設 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 是對稱核 $K(x,s)$ 的一切特徵值, 且 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … 是和這些特徵值對應的特徵函數。其次, 設 $h(x)$ 是 x 的函數, 它在區間 (a,b) 內是平方絕對可積。如果積分

$$\int_a^b |K^2(x,s)|\,ds$$

是有界的, 則下函數

$$f(x)=Kh=\int_a^b K(x,s)h(s)ds \tag{7}$$

可展爲關於正交標準系 $\varphi_n(x)$ 的絕對收斂的且一致收斂的富里耶級數:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n(x), \quad f_n=(f,\varphi_n)。$$

$f(x)$ 的富里耶係數 f_n 和 $h(x)$ 的富里耶係數 h_n 之間有下面的聯繫關係

$$f_n=\frac{h_n}{\lambda_n}, \quad h_n=(h,\varphi_n),$$

從而有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)。\tag{8}$$

此處我們可以注意的，在上面定理中，對於函數 $h(x)$ 的富里耶級數沒有收斂的假設，也沒有特徵函數所成的正交標準系爲完備的假設。

1°. 茲求 $f(x)$ 關於正交標準系 $\varphi_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ 的富里耶係數。這係數是

$$f_n=(f,\varphi_n)=(Kh,\varphi_n)=(h,K\varphi_n)。$$

但 $\varphi_n-\lambda_n K\varphi_n=0$，從而有 $K\varphi_n=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)$，且

$$f_n=\frac{1}{\lambda_n}(h,\varphi_n)=\frac{h_n}{\lambda_n}。$$

我們研究函數 $f(x)$ 的富里耶級數。這級數有下形式

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)。\tag{9}$$

我們對這級數的餘項作下面的估計。由柯西不等式，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}h_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}h_k^2\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}h_k^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2}。$$

由於引理 2，不等式右邊的第二因子的和是有界的，而由於級數 $\sum_{k=1}^{\infty}h_k^2$ 是收斂的，故可使第一因子的和是一個任意小正數。由此推知級數(9)是絕對收斂的且一致收斂的。用 $\omega(x)$ 表示級數(9)，且用 $\omega_n(x)$ 表示它的第 n 個部分和。

2°. 我們估計這個值 $\|f(x)-\omega_n(x)\|^2$。從定義，有

$$f(x)-\omega_n(x)=Kh-\sum_{m=1}^{n}\frac{h_m}{\lambda_m}\varphi_m(x)=$$

$$=Kh-\sum_{m=1}^{n}\frac{(h,\varphi_m)}{\lambda_m}\varphi_m(x)=K^{(n)}h,$$

其中 $K^{(n)}h$ 按照我們以前用的記號是

$$K^{(n)}h=\int_a^b K^{(n)}(x,s)h(s)ds。$$

其次， $\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=\|K^{(n)}h\|^2=(K^{(n)}h,K^{(n)}h)$。

應用 §11 中(3)式,得到

$$\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=(h,(K^{(n)})^2h)。$$

$(K^{(n)})^2$ 是弗列德和蒙算子，就是關於 $K^{(n)}(x,s)$ 的二次疊核。按通常情況，我們用 $K_2^{(n)}(x,s)$ 表示這個疊核，且以 $K_2^{(n)}h$ 代替 $(K^{(n)})^2h$。於是有

$$\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=(h,K_2^{(n)}h)。$$

由於引理3及引理1，$K_2^{(n)}(x,s)$ 的最小特徵值等於 λ_{n+1}^2，且由 §12 定理3，有

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}=\mathrm{Max}\frac{(\varphi,K_2^{(n)}\varphi)}{(\varphi,\varphi)}\text{❶}。$$

於是對於任一函數 $h(x)$，有

$$\frac{(h,K_2^{(n)}h)}{(h,h)}\leqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}^2},$$

或 $(h,K_2^{(n)}h)\leqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}^2}(h,h)$。但 $\lambda_{n+1}\to\infty$。由此推知

$$\|f(x)-\omega_n(x)\|^2=(h,K_2^{(n)}h)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0。$$

3°. 現在證明 $f(x)\equiv\omega(x)$。爲了證明這個事實,我們對於 $\|f-\omega\|$ 作一估計。由三角不等式,有

$$\|f-\omega\|\leqslant\|f-\omega_n\|+\|\omega_n-\omega\|。$$

由於上面的證明,當 $n\to\infty$ 時,不等式右邊的和中第一個值趨於零。因級數(8)是一致收斂的，故當 n 爲充分大時，$|\omega_n(x)-\omega(x)|<\varepsilon$，其中 ε 是任意正數。

---

❶ 此處略去絕對值符號，因

$$(\varphi,K_2^{(n)}\varphi)=(\varphi,(K^{(n)})^2\varphi)=(K^{(n)}\varphi,K^{(n)}\varphi)=\|K^{(n)}\varphi\|^2\geqslant0。$$

於是，有

$$\|\omega_n-\omega\|^2=\int_a^b|\omega_n(x)-\omega(x)|^2dx<\varepsilon^2(b-a),$$

故當 n 爲充分大時，可使 $\|\omega_n-\omega\|$ 爲任意小正數。也就是當 $n\to\infty$ 時，$\|\omega_n-\omega\|$趨於零。這樣一來，當 $n\to\infty$ 時，$\|f-\omega\|\to 0$。但由於 $\|f-\omega\|$ 不依賴於 n，因而 $\|f-\omega\|=0$，由此推得 $f(x)\equiv\omega(x)$。

§ 14. 由銳茨方法以決定第一特徵值。

由 § 12 定理 3，它將求對稱核的最小特徵值的問題，歸結到在規定條件

$$(\varphi,\varphi)=\int_a^b|\varphi^2(x)|dx=1 \tag{1}$$

之下，求下面的極大值

$$|(K\varphi,\varphi)|=\left|\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi(x)\overline{\varphi(s)}dxds\right| \tag{2}$$

的問題。由於這個定理，使我們能夠直接應用變分法來計算最小特徵值。在特殊情況，可能應用銳茨方法。我們選擇任意一個函數敍列

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \cdots,\ \psi_n(x),\ \cdots, \tag{3}$$

如果不論 $f(x)$ 是怎樣的函數，我們恆可能選擇一個正整數 n 和係數 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots$，使下不等式

$$\left\|f(x)-\sum_{k=1}^n\alpha_k\psi_k(x)\right\|<\varepsilon$$

成立，其中 ε 是任意正數，則謂函數敍列（3）是完備的，且用"完備函數列"這個名詞來稱呼它。換個樣子來講，如果可能選擇係數 α_k 及正整數 n，使下面的近似式

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^n\alpha_k\psi_k(x)$$

的平方均值誤差是一個任意小正數，則（3）叫做完備函數列。在特殊情況，我們可取（3）是任意完備正交標準系。在（2）中，令

$$\varphi(x)=a_1\psi_1(x)+a_2\psi_2(x)+\cdots+a_n\psi_n(x),$$

其中係數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是滿足條件 $(\varphi, \varphi)=1$ 的任意常數。現在這條件是下形式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_i\overline{a}_k(\psi_i, \psi_k)=1, \tag{4}$$

而(2)則變作下面的形式:

$$|(K\varphi, \varphi)|=|\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}a_i\overline{a}_k|, \tag{5}$$

其中
$$A_{ik}=\int_a^b\int_a^b K(x, s)\psi_i(x)\overline{\psi_k(s)}dx ds。$$

由於核是對稱的,有 $A_{ik}=\overline{A_{ki}}$。

我們將在滿足條件(4)的情況下以求(5)式的極大值。這顯然是多變數函數的極大值問題。解這個問題,且計算出極大值(5)。在這意義下,我們得到最小特徵值的絕對值的近似值。我們將證這個近似值不小於眞值,且當 $n\to\infty$ 時,它趨向於眞值。

用 $\lambda_1^{(n)}$ 表示(5)式的極大值的倒數,且用 $\varphi^{(n)}(x)$ 表示使這個極大值實現的函數。於是

$$\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}=|(K\varphi^{(n)}, \varphi^{(n)})|\leqslant \mathrm{Max}|(K\varphi, \varphi)|=\frac{1}{|\lambda_1|},$$

其中 λ_1 是所設核的絕對值意義的最小特徵值。由此推知 $\lambda_1^{(n)}\geqslant|\lambda_1|$。

餘下的問題,是證明 $\lambda_1^{(n)}\to|\lambda_1|$。因(3)是完備函數列,則可能有下形式的函數

$$\omega(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\psi_k(x), \quad \alpha_k=\text{常數},$$

使 $\|\varphi_1-\omega\|<\frac{\varepsilon}{4}$,其中 $\varphi_1(x)$ 是核 $K(x, s)$ 與 λ_1 對應的特徵函數,而 ε 是一個任意正數。其次,令

$$\omega_1(x)=\frac{\omega(x)}{\|\omega\|}。$$

因此 $\omega_1(x)$ 滿足條件(1)。我們對於 $\|\varphi_1-\omega_1\|$ 作估計。由三角不等

式，有 $\|\varphi_1\|-\|\omega\|\leqslant\|\varphi_1-\omega\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$，從而有 $\|\omega\|>1-\frac{\varepsilon}{4}$。我們再引一記號 $\|\omega\|=\sigma$。現在，有

$$\|\varphi_1-\omega_1\|=\frac{\|\sigma\varphi_1-\omega\|}{\sigma}<\frac{\|\sigma\varphi_1-\omega\|}{1-\frac{\varepsilon}{4}}。$$

取 ε 爲一足夠小正數使它適合不等式 $1-\frac{\varepsilon}{4}>\frac{1}{2}$，則由此推得

$$\|\varphi_1-\omega_1\|<2\|\sigma\varphi_1-\omega\|=$$
$$=2\|\varphi_1-\omega-(1-\sigma)\varphi_1\|\leqslant2\|\varphi_1-\omega\|+2(1-\sigma)<\varepsilon。$$

現在我們估計下差

$$\Delta=|(K\varphi_1,\varphi_1)|-|(K\omega_1,\omega_1)|,$$

其中函數 $\omega_1(x)$ 滿足條件（1）。從 § 12 定理 3，有 $\Delta>0$。其次，顯有

$$\Delta\leqslant|(K\varphi_1,\varphi_1)-(K\omega_1,\omega_1)|。$$

我們研究下值

$$(K(\varphi_1+\omega_1),\ \varphi_1-\omega_1)=(K\varphi_1+K\omega_1,\ \varphi_1-\omega_1)=$$
$$=(K\varphi_1,\varphi_1)+(K\omega_1,\varphi_1)-(K\varphi_1,\omega_1)-(K\omega_1,\omega_1)。$$

由 § 11 中的（3）式，上不等式的第二項和第三項彼此消去，於是得到

$$\Delta\leqslant|(K(\varphi_1+\omega_1),\ \varphi_1-\omega_1)|。$$

應用布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式：

$$\Delta^2\leqslant\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2\cdot\|\varphi_1-\omega_1\|^2<\varepsilon^2\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2。$$

其次，

$$\|\varphi_1+\omega_1\|\leqslant\|\varphi_1\|+\|\omega_1\|=2,$$

且

$$\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2=\int_a^b\left|\int_a^b K(x,s)[\varphi_1(s)+\omega_1(s)]ds\right|^2dx。$$

同樣，由布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式，有

$$\left|\int_a^b K(x,s)[\varphi_1(s)+\omega_1(s)]ds\right|^2\leqslant\int_a^b|K^2(x,s)|ds\int_a^b|\varphi_1(s)+\omega_1(s)|^2ds\leqslant$$
$$\leqslant4\int_a^b|K^2(x,s)|ds。$$

對於這個不等式的兩邊取自 a 至 b 的積分，我們得

$$\|K(\varphi_1+\omega_1)\|^2\leqslant 4B^2,$$

最後，有
$$A<2B\varepsilon。$$

由函數 $\varphi^{(n)}$ 的定義，有

$$|(K\varphi_1,\varphi_1)|\geqslant|(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)})|\geqslant|(K\omega_1,\omega_1)|。$$

於是推得

$$\frac{1}{|\lambda_1|}-\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}=|(K\varphi_1,\varphi_1)|-|(K\varphi^{(n)},\varphi^{(n)})|\leqslant A。$$

但 A 是一個任意小正數，從而推得 $\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}\to\frac{1}{|\lambda_1|}$，且因之有 $\lambda_1^{(n)}\to|\lambda_1|$。

我們指出可使問題簡單化的一些情況。

（a）如果核 $K(x,s)$ 是實函數，且選擇函數 $\psi_i(x)$ 也是實函數，則對於係數 a_k 可能僅限於實數來討論。我們用下二式

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_ia_k(\psi_i,\psi_k)=1, \tag{4$_1$}$$

$$|(K\varphi,\varphi)|=|\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}a_ia_k| \tag{5$_1$}$$

以代替（4）及（5），且

$$A_{ik}=\int_a^b\int_a^b K(x,s)\psi_i(x)\psi_k(s)dx\,ds。$$

核是實函數的情況，對於應用方面有重要價值。此處將限於這個情況來研究。

（б）如果函數列（3）是正交標準系，則(4_1)取更簡單形式：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1。$$

（в）如果已知 $(K\varphi,\varphi)$ 僅取正值❶，則問題變爲特殊簡單。在這情況，我們必須解決滿足條件(4_1)而使下面二次式

$$(K\varphi,\varphi)=\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}a_ia_k \tag{5$_2$}$$

是極大值的問題。由 §12 中（2）式，顯示出在所考慮的情況下特徵值

❶ 如果核有這樣性質，我們稱它爲正定核。

是正數，且(5_2)式的極大值的解立即給出特徵值的近似值。

由拉格朗日的未定乘數法可得出(5_2)的極大值。引用記號

$$F=\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}a_ia_k,\quad \Phi=F-\sigma\sum_{i=1}^{n}a_i^2, \tag{6}$$

其中σ是未定乘數。於是變量a_i的極值由下方程決定

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}=\frac{\partial F}{\partial a_i}-2\sigma a_i=0,$$

或，展開的形式

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ik}a_k-\sigma a_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n。 \tag{7}$$

方程組（7）是線性齊次式。因$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$，故係數$a_i$不能同時爲零，因而方程組（7）的係數行列式必須等於零，於是我們得到關於未知數σ的一個方程：

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\sigma & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\sigma & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\sigma \end{vmatrix}=0。 \tag{8}$$

以a_i乘（7）式，且對於i從1至n取和，且由於$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$，則我們得到$\sigma=F$。這時$F$顯然了解是極大值。且極大值$F$也顯然等於方程（8）的最大根。

如果應用克勒諾夫院士的對於左邊行列式的展開的方法，則解方程（8）可大大地簡單化❶。

和特徵值同時，它的對應的特徵函數的決定是很重要的。這個問題與特徵值的決定的問題比較要複雜得多。然而如果預知與已給特徵值對應的特徵函數是唯一的，則問題的解決變爲簡單。在這情況，我們

❶ 這個方法詳細的說明，見於阿·勒·克勒諾夫論文“決定質點系微小振動的頻率的方程的根的計算”。蘇聯科學院彙報，數學及自然科學部門，1931，№ 4。

只須從方程組(7)求得 $a_1, a_2, \cdots, a_n$; 於是下式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x)$$

就是我們需要求的特徵函數的近似式。

茲討論下方程的性質作爲例子。

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)dx=0,$$

其中

$$K(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varkappa}x(\varkappa-s), & \text{當}\quad x\leqslant s,\\ \dfrac{1}{\varkappa}s(\varkappa-x), & \text{當}\quad x\geqslant s。\end{cases}\quad(\varkappa>1), \tag{9}$$

對這個方程，我們得出從熱傳導理論中一個問題的解答。可能證明由(9)所表示的核是正函數。我們採用在 $(0,1)$ 內的正交標準系

$$\psi_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x,\quad k=1,2,3,\cdots,$$

作爲函數列(3)。

取 $n=2,3,4$, 我們求這個核的最小特徵值的近似值。爲了有確定意義取 $\varkappa=2$。我們很容易得到:

$$A_{ik}=\frac{(-1)^{i+k}}{ik\pi^2},\quad \text{當 } i\neq k;\quad A_{ii}=\frac{2}{i^2\pi^2}。$$

取 $n=2$, 則我們要解的，是在條件 $a_1^2+a_2^2=1$ 下而使下二次式

$$F=\frac{1}{\pi^2}\left(2a_1^2-a_1a_2+\frac{1}{2}a_2^2\right)$$

是極大值的問題。在這情況，方程(8)取下形式 $(\tau=\sigma\pi^2)$

$$\begin{vmatrix}2-\tau & -1\\ -1 & 2-4\tau\end{vmatrix}=0,$$

或 $4\tau^2-10\tau+3=0$。這個方程的最大根 $\tau\approx2.15$。於是

$$\lambda_1\approx\frac{\pi^2}{2.15}\approx4.59。$$

取 $n=3$, 我們得到對於 $\tau=\sigma\pi^2$ 的方程

$$\begin{vmatrix} 2-\tau & -1 & 1 \\ -1 & 2-4\tau & -1 \\ 1 & -1 & 2-9\tau \end{vmatrix}=0,$$

或
$$18\tau^3-49\tau^2+21\tau-2=0,$$

這個方程的最大根等於 2.22 。從而給出 $\lambda_1\approx4.47$ 。

取 $n=4$, 我們引出方程

$$\begin{vmatrix} 2-\tau & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2-4\tau & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2-9\tau & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2-16\tau \end{vmatrix}=0,$$

或
$$576\tau^4-1640\tau^3+819\tau^2-120\tau+5=0。$$

這個方程的最大根等於 2.258, 從而給出 $\lambda_1\approx4.371$ 。用其他方法, 可求得 λ_1 的更準確值是 4.115 。

如何得到這個值 λ_1, 我們將作簡單說明。以(9)作核的齊次方程有下形式

$$\varphi(x)-\frac{\lambda}{\varkappa}\int_0^x s(\varkappa-x)\varphi(s)ds-\frac{\lambda}{\varkappa}\int_x^1 x(\varkappa-s)\varphi(s)ds=0。\tag{10}$$

對於 x 求微商, 則得

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(x)+\frac{\lambda}{\varkappa}\int_0^x s\varphi(s)ds-\frac{\lambda}{\varkappa}\int_x^1(x-s)\varphi(s)ds=0, \\ \varphi''(x)+\lambda\varphi'(x)=0。\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

從此有 $\varphi(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$, $\mu=\sqrt{\lambda}$ 。從 (10) 及 (11) 有 $\varphi(0)=0$, $(\varkappa-1)\varphi'(1)+\varphi(1)=0$。從第一個等式, 即有 $A=0$。當 $\varkappa=2$ 時, 第二個等式取簡單形式 $\varphi'(1)+\varphi(1)=0$, 從而得出決定 μ 的方程:

$$\mu+\operatorname{tg}\mu=0。$$

這個方程的根可能從 (μ, y) 平面上的兩條直線 $y=-\mu$ 及 $y=\operatorname{tg}\mu$ 的交點得出。不難看出它的最小正根是在 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間, 即 $\frac{\pi}{2}<\mu<\pi$ 。令 $\mu=\pi-\nu$, 於是得出下方程

$$\operatorname{tg}\nu=\pi-\nu,$$

我們用近似法以解這個方程, 而令 $\nu_0=1$ 。我們取第二近似根至四位有效數字, 得到 $\nu=1.1128$, 從而得 $\mu=2.0288$, 且 $\lambda=\mu^2=4.115$ 。

§15. 從核的跡以決定第一特徵值 在§13希爾伯脫-施密特公式(8)中,令 $h(s)=K(s,t)$。我們得到

$$K_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n(t)}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

其中 $\omega_n(t)$ 是核 $K(x,t)$ 關於它的特徵函數 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 的富里耶係數。我們不難計算這些係數。由富里耶係數公式,有

$$\omega_n(t)=\int_a^b K(x,t)\overline{\varphi_n(x)}dx。$$

因 $K(x,t)$ 是對稱核,或寫作

$$\omega_n(t)=\int_a^b \overline{K(t,x)}\,\overline{\varphi_n(x)}dx。$$

但 $\varphi_n(x)$ 滿足下方程

$$\varphi_n(x)=\lambda_n\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)dt。$$

將 x 及 t 互換,從而得到:

$$\int_a^b K(t,x)\varphi_n(x)dx=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(t),$$

於是最後有 $\omega_n(t)=\frac{1}{\lambda_n}\overline{\varphi_n(t)}$。現在我們有下式:

$$K_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^2}。\qquad (1)$$

相似情況,我們有

$$K_3(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^3},$$

一般地,有

$$K_m(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^m}。\qquad (2)$$

例如,為了要得 $K_3(x,t)$ 的表示式,我們仍然應用希爾伯脫-施密特公式,而在這公式中,令 $h(s)=K_2(s,t)$。由(1),則 $K_2(x,t)$ 的第 n 個富里耶係數等於 $\frac{1}{\lambda_n^2}\overline{\varphi_n(t)}$。

我們證明下一事實：如果 $m\geqslant 3$，且核 $K(x,t)$ 滿足經常設的條件：

$$\int_a^b |K^2(x,t)|\,dt<C_1,\quad C_1=\text{常數}。$$

則級數(2)關於兩個變數 x 及 t 是一致收斂的。

為了證明上述事實，我們取級數(2)的餘項來討論。

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^m}\right|\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right|。$$

應用柯西不等式，且由 § 13 引理 2，我們有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^m}\right|\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k^2(t)|}{\lambda_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_1}{|\lambda_{n+1}^{m-2}|}。$$

因當 $n\to\infty$ 時，$\lambda_n\to\infty$，此最後分數趨向於零。由此推知級數(2)是絕對收斂的且一致收斂的。至於論及級數(1)，如果將這級數中一個變數視為固定，則它對於 x 及 t 中另一變數是一致收斂的，這個結論從希爾伯脫-施密特定理立即顯出。

我們稱級數(2)是 $K_m(x,t)$ 的雙線性級數❶。我們可回憶一下，曾經將下面積分

$$A_m=\int_a^b K_m(x,x)\,dx$$

叫做 $K(x,s)$ 的 m 次跡。如果核是對稱的，則它的跡和特徵值由下關係聯繫着：

$$A_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^m},\quad m\geqslant 2。\tag{3}$$

❶ 對於核 $K(x,t)$ 也可能有雙線性級數。它的形式是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n}。\tag{甲}$$

一般言之，級數(甲)是發散的。然而可能證明它均值收斂於 $K(x,t)$。如果級數(甲)對於 x 及對於 t 皆是一致收斂的，則它的和等於 $K(x,t)$。

我們不難得到(3)式。在(2)中令$t=x$，且從a至b取積分。經過適當的計算，我們可將特徵函數所成的敍列變爲正交標準系，也就是

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = \mathbf{1}。$$

於是(3)式的成立，轉變爲下面的級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^2(x)|}{\lambda_k^m}$$

可否逐項積分的問題。當$m>2$時，級數(2)是一致收斂的，顯然可以逐項積分。而當$m=2$時，則從勒白格關於正項級數逐項積分的定理，(3)式也成立。

因

$$A_{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2m}}, \tag{4}$$

且λ_n皆是實數，故下標是偶數的一切跡皆是正數。

還要指出的，有

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b |K_m(x,t)|^2 dx\,dt。 \tag{5}$$

事實上，由§2中(8)式，有

$$K_{2m}(x,s) = \int_a^b K_m(x,t) K_m(t,s)\,dt,$$

或由於核是對稱的，則有

$$K_{2m}(x,s) = \int_a^b K_m(x,t)\overline{K_m(s,t)}\,dt。$$

由此推得

$$K_{2m}(x,x) = \int_a^b |K_m(x,t)|^2 dt。$$

將最後等式對於x積分，我們得到(5)式。

我們示知如果核的跡是已知的，則可能求得它的最小特徵值。設最小特徵值λ_1對應於p個線性無關特徵函數。且如果$-\lambda_1$也是特徵值，它對應於q個線性無關特徵函數。於是在(4)式的級數中含有λ_1^{2m}

的項有 $r=p+q$ 次。將(4)變作下形式

$$A_{2m}=\frac{r}{\lambda_1^{2m}}(1+\varepsilon_m), \tag{6}$$

其中 ε_m 表示下值

$$\varepsilon_m=\frac{1}{r}\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{2m}。$$

因當 $n>r$ 時,有 $|\lambda_n|>|\lambda_1|$,不難證明當 $m\to\infty$ 時, $\varepsilon_m\to 0$。

事實上,設 $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}$ 在表示 ε_m 的和中的符號下面出現 r' 次,於是有

$$\varepsilon_m=\frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r'+\sum_{n=r+r'+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_n}\right)^{2m}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right)^{2m}\left[r'+\sum_{n=r+r'+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_n}\right)^{2}\right],$$

當 $m\to\infty$ 時,此最後不等式的右邊顯然趨於零。現在從(6)推得:

$$\lambda_1^2=\lim_{m\to\infty}\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}};\quad \lambda_1^2=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{1}{A_{2m}}}。 \tag{7}$$

從(6)也可得到下面兩個近似公式,這兩個近似式適用於充分大 m:

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}};\quad |\lambda_1|\approx\frac{\sqrt[2m]{r}}{\sqrt[2m]{A_{2m}}}。 \tag{7_1}$$

如果 $q=0$, 從(3)式可能得到一個公式,這公式給出 λ_1 和它的符號:

$$\lambda_1=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2m+1]{A_{2m+1}}}, \tag{8}$$

及對應的近似公式

$$\lambda_1\approx\frac{\sqrt[2m+1]{p}}{\sqrt[2m+1]{A_{2m+1}}}。 \tag{8_1}$$

這公式對於任何情況都是正確的。

當 λ_1 的符號不能由其它方法決定時,可用(8_1)式來計算。

從(6)推得

$$|\lambda_1|=\frac{\sqrt[2m]{r(1+\varepsilon_m)}}{\sqrt[2m]{A_{2m}}}>\sqrt[2m]{\frac{r}{A_{2m}}}。$$

於是如果用(7_1)的第二式作為 $|\lambda_1|$ 的近似值，要比真值小一些。另一方面，因顯然有 $\varepsilon_m>\varepsilon_{m+1}$，故

$$\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}=\lambda_1^2\frac{1+\varepsilon_m}{1+\varepsilon_{m+1}}>\lambda_1^2,$$

於是如果(7_1)的第一式作為 $|\lambda_1|$ 的近似值，要比真值大一些。

我們取前節所討論的核作為例子。這個核由下式確定

$$K(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}x(2-s), & 當\quad x\leqslant s,\\ \frac{1}{2}s(2-x), & 當\quad x\geqslant s。\end{cases}$$

我們計算這種核的二次疊核。由這個疊核以決定跡 A_2 和跡 A_4。因 $K(x,s)$ 是對稱核，故只須設 $s<x$ 以求 $K_2(x,s)$。則有

$$K_2(x,s)=\int_0^1 K(x,t)K(t,s)\,dt=\frac{1}{4}\int_0^s(2-x)(2-s)t^2\,dt+$$
$$+\frac{1}{4}\int_s^x t(2-t)s(2-x)\,dt+\frac{1}{4}\int_x^1 xs(2-t)^2\,dt=$$
$$=\frac{1}{12}[-s^3(2-x)+s(x^3-6x^2+7x)],\quad (s<x)。$$

當 $x<s$ 時，我們從上式將 x 及 s 互換，則得到：

$$K_2(x,s)=\frac{1}{12}[-x^3(2-s)+x(s^3-6s^2+7s)],\quad (x<s)。$$

這是由核 $K_2(x,s)$ 的對稱性顯示出來的。

我們從事於跡 A_2 和跡 A_4 的計算。由公式(5)，有

$$A_2=\int_0^1\int_0^1 K^2(x,s)\,dx\,ds。$$

因 $K(x,s)$ 是實函數，故絕對值的記號可略去。對於這個最後式子作一些改變。它可能寫作下形式

$$A_2=\iint K^2(x,s)\,dx\,ds,$$

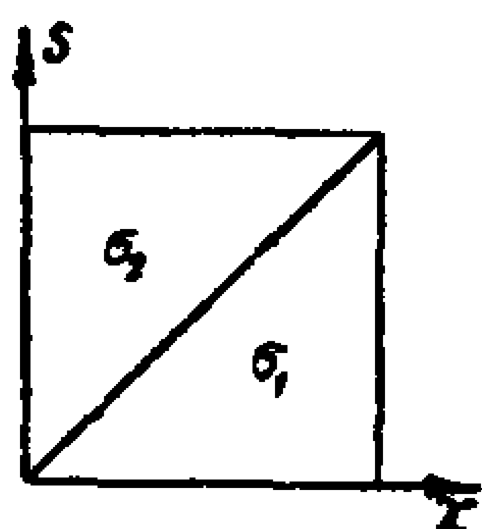


圖 2

其中 σ 表示正方形 $0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant s\leqslant 1$ (圖 2)。引對角線 $x=s$，於是 σ 分成兩個三角形 σ_1 和 σ_2，因此有

$$A_2=\iint_{\sigma_1} K^2(x,s)dx\,ds+\iint_{\sigma_2}K^2(x,s)dx\,ds\text{。}$$

由於 $K(x,s)$ 的對稱性，故沿 σ_1 和沿 σ_2 的積分是相等的；因此

$$A_2=2\iint_{\sigma_1} K^2(x,s)dx\,ds=2\int_0^1 dx\int_0^x K^2(x,s)ds\text{。}$$

一般言之，有

$$A_{2m}=2\int_0^1 dx\int_0^x K_m^2(x,s)ds\text{。}$$

在我們的例子，則有

$$A_2=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x s^2(2-x)^2 ds=\frac{11}{180}\text{。}$$

相同情況，也有

$$A_4=\frac{1}{72}\int_0^1 dx\int_0^x[-s^3(2-x)+s(x^3-6x^2+7x)]^2 ds=\frac{113}{32400}\text{。}$$

從 (7_1) 中第二式，令 $m=2$，於是有❶

$$|\lambda_1|\approx\frac{1}{\sqrt[4]{A_4}},$$

因 $\lambda_1>0$ (參閱 § 14)，或寫作

$$\lambda_1\approx\frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}=4.115\text{。}$$

取這個值作爲 λ_1 的近似值還是小了一些，但與眞值足夠接近了。我們見到由 (7_1) 給出的近似值要比銳茨方法得出的值準確得多。如果我們用 (7_1) 中的第一式而取 $m=1$，則得出更好的結果，也就是

$$\lambda_1\approx\sqrt{\frac{A_2}{A_4}}=4.186,$$

❶ 可能證明在我們的例子中，有 $r=1$。

取這個值作爲 λ_1 的近似值要比眞值大一些。

§16. **克洛格方法** 克洛格氏給了一個巧妙而適用的方法以決定對稱核的特徵值，雖然這個方法並不是完全妥當的。克洛格的方法有如下面所述。任取一個函數 $\omega(x)$，從這個函數出發，作出一系列函數，如

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1(x)=\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds,\\ \omega_2(x)=\int_a^b K(x,s)\omega_1(s)ds,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_n(x)=\int_a^b K(x,s)\omega_{n-1}(s)ds,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{array}\right\} \quad (1)$$

一般言之，下面的極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}=\mu \quad (2)$$

存在，且等於 $K(x,s)$ 的諸特徵值中某一個特徵值的絕對值。此外，下面的極限函數

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|} \quad (3)$$

存在，而 $\psi(x)$ 在某些條件下，它本身就是 $K(x,s)$ 的特徵函數，且這個特徵函數是與特徵值 $+\mu$ 或 $-\mu$ 對應的。我們回憶一下，所謂任意函數 $f(x)$ 的模是指下面的值

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b |f^2(x)|dx}\text{。}$$

我們闡明在什麽條件下，克洛格方法給出正面結果。設 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 是核 $K(x,s)$ 的特徵函數，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$，是和它們對應的特徵值。可能發生這樣的事情，$\omega(x)$ 與一切函數 $\varphi_i(x)$ 是正交的。在這樣情況，由希爾伯脫-施密特公式指出

$$\omega_1(x)=\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds=0\text{。}$$

而(1)中的一切函數都變爲零。在這樣情況，克洛格方法不能給出什麼結果。現在設 $\omega(x)$ 不與一切 $\varphi_i(x)$ 都是正交的。設以 $\varphi_r(x)$ 表示在特徵函數列中第一個不與 $\omega(x)$ 成正交的函數。現在，希爾伯脫-施密特公式給出

$$\omega_1(x)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k(x),\quad a_r\neq 0,$$

其中 $a_k=(\omega,\varphi_k)$ 是 $\omega(x)$ 關於正交標準系 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 的富里耶係數。重複應用希爾伯脫-施密特公式，我們得到：

$$\omega_n(x)=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^n}\varphi_k(x)。\tag{4}$$

從(4)可推得

$$\|\omega_n\|=\sqrt{\sum_{k=r}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{\lambda_k^{2n}}}。\tag{5}$$

我們來證明(5)式。公式(4)指出 $\omega_n(x)$ 關於 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 的富里耶係數等於 $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$。現在將 $\overline{\omega_n(x)}$ 乘(4)式且積分之。回想一下模的定義，我們得到：

$$\|\omega_n\|^2=\sum_{k=r}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k^n}(\varphi_k,\omega_n)。$$

但 $(\varphi_k,\omega_n)=\overline{(\omega_n,\varphi_k)}$，而數量積 (ω_n,φ_k) 是 $\omega_n(x)$ 的第 k 個富里耶係數，且等於 $\frac{a_k}{\lambda_k^n}$。將這個值的共軛值代入最後等式，我們得到(5)式。

可能發生這樣的事情，λ_r 不是與一個特徵函數對應的，而是與多個特徵函數對應的。其次，$-\lambda_r$ 也可能是一個特徵值。在這樣情況，級數(5)含有以 λ_r^{2n} 作分母的若干個項。設這些項是出現在下標爲 $r, r+1,\cdots,r'$ 的諸項中。引用下記號

$$A^2=|a_r|^2+|a_{r+1}|^2+\cdots+|a_{r'}|^2。$$

因 $a_r\neq 0$，故 A 不等於零。現在將(5)式變作下面的形式

$$\|\omega_n\|=\frac{A}{|\lambda_r|^n}\sqrt{1+\alpha_n},$$

其中
$$\alpha_n=\frac{1}{A}\sum_{k=r'+1}^{\infty}|a_k|^2\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n}。$$

不難證明當 $n\to\infty$ 時，$\alpha_n\to 0$。取 n 次根式然後取極限，我們得到：
$$\frac{1}{|\lambda_r|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\omega_n\|}。$$

現在我們組成比式
$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|}=\frac{\lambda_r^{2n}}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}}\sum_{k=r}^{\infty}\frac{a_k\varphi_k(x)}{\lambda_k^{2n}}。$$
將分母中含有 λ_r^{2n} 的項消去，我們得到：
$$\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|}=\sum_{k=r}^{r'}\frac{a_k\varphi_k(x)}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}}+\frac{1}{A\sqrt{1+\alpha_{2n}}}\sum_{k=r'+1}^{\infty}a_k\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_k}\right)^{2n}\varphi_k(x)。$$
不難證明當 $n\to\infty$ 時，第二個和趨於零。取極限，我們得到：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{2n}(x)}{\|\omega_{2n}\|}=\sum_{k=r}^{r'}\frac{a_k}{A}\varphi_k(x)。\tag{6}$$

現在假定在 λ_r 及 $-\lambda_r$ 兩個數中僅有一個是特徵值。在這時，(6)式中的和是對應於 λ_r（或 $-\lambda_r$）的諸特徵函數的一個線性組合，因此這個和的本身也是與同一特徵值對應的一個特徵函數。同時所指的和不恆等於零，因 $\varphi_r(x)$，$\varphi_{r+1}(x)$，…，$\varphi_{r'}(x)$ 是線性無關的，且 $a_r\neq 0$ 的緣故。

如果 $\omega(x)$ 不與 $\varphi_1(x)$ 成正交，由克洛格方法，可確定最小特徵值及與它對應的特徵函數。

若函數 $\omega(x)$ 選擇得很好，則計算上可能達到比較地簡單。這是克洛格方法的最大優越性。包含在這個方法裏面本質上的缺點是我們不能預知 $\omega(x)$ 與那些個特徵函數是否成正交，且對於餘下的特徵值不知怎樣來決定。

應注意的，特徵值的絕對值也可能由下式決定
$$\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}。\tag{2_1}$$

若取下面近似式

$$\mu \approx \sqrt[n]{\frac{1}{\|\omega_n\|}}, \tag{7}$$

$$\mu \approx \frac{\|\omega_n\|}{\|\omega_{n+1}\|}, \tag{7_1}$$

以代替(2)及(2_1),則(7_1)式給出的近似值比眞值大一些。對於這個意義(7)式是無從論及的。

爲了對於克洛格方法作一個說明,我們仍用前面兩節討論過的核:

$$K(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x(2-s), & \text{當} \quad x\leqslant s,\\[2ex] \dfrac{1}{2}s(2-x), & \text{當} \quad s\geqslant x。\end{cases} \tag{8}$$

在前面已經指出這個核的特徵值都是正的。其次,可能證明每一個特徵值僅有一個特徵函數與它對應。克洛格方法使有可能對於這些特徵函數的決定。

令 $\omega(x)=x$ 。對於 $\omega_n(x)$ 的計算,需要下面的積分值

$$\int_0^1 K(x,s)s^n ds 。$$

經過簡單計算,給出:

$$\int_0^1 K(x,s)s^n ds=\frac{(n+3)x}{2(n+1)(n+2)}-\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}。 \tag{9}$$

現在,有

$$\omega_1(x)=\int_0^1 K(x,s)s\,ds=\frac{x}{3}-\frac{x^3}{6}; \quad \|\omega_1\|=0.1371;$$

$$\omega_2(x)=\int_0^1 K(x,s)\omega_1(s)ds=\frac{31x}{360}-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{120}; \quad \|\omega_2\|=0.03328;$$

$$\omega_3(x)=\int_0^1 K(x,s)\omega_2(s)ds=\frac{1}{360}\left(\frac{160x}{21}-\frac{31x^3}{6}+x^5-\frac{x^7}{14}\right);$$

$$\|\omega_3\|=0.0080083 。$$

在(7)式中,令 $n=3$ 。於是我們得到 $\mu\approx 4.998$ 。因 $K(x,s)$ 的

特徵值是正的，則 $\lambda_1=\mu\approx4.998$。$(7_1)$式給出 $\lambda_1\approx4.156$。

前已指出核(8)的每一特徵值僅與一個特徵函數對應。在這樣情況，按照公式(6)，我們可能令

$$\varphi_1(x)\approx M\frac{\omega_3(x)}{\|\omega_3\|},\quad M=\frac{A}{a_1}。$$

M 的值可從這樣需要來決定，使 $\varphi_1(x)$ 標準化。於是我們顯然可令 $M=1$，且

$$\varphi_1(x)=2.643x-1.724x^3+0.347x^5-0.025x^7。\tag{10}$$

§17. 次一特徵值的決定。設諸特徵值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 及與它們對應的諸特徵函數 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 都是已知的，則可能決定次一特徵值 λ_{n+1} 及與 λ_{n+1} 對應的特徵函數 $\varphi_{n+1}(x)$。決定 λ_{n+1} 及 $\varphi_{n+1}(x)$ 的方法，是以下面兩個定理作基礎的。

定理1. 核 $K(x,s)$ 的特徵值 λ_{n+1} 的絕對值的倒數，等於下積分

$$|(K\varphi,\varphi)|=\left|\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi(x)\overline{\varphi(s)}dx\,ds\right|\tag{1}$$

的極大值，但 $\varphi(x)$ 須滿足下列條件

$$(\varphi,\varphi)=1,\ (\varphi,\varphi_1)=0,\ (\varphi,\varphi_2)=0,\ \cdots,\ (\varphi,\varphi_n)=0。\tag{2}$$

定理2. 設 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$ 是核 $K(x,s)$ 的一切特徵值組成的敍列，而 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 是與它們對應的特徵函數所成的正交標準系。於是 λ_{n+1} 是核

$$K^{(n)}(x,s)=K(x,s)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}}{\lambda_k}\tag{3}$$

的絕對值意義的最小特徵值，而 $\varphi_{n+1}(x)$ 是核 $K^{(n)}(x,s)$ 的與 λ_{n+1} 對應的特徵函數。

從§13引理3定理2立即顯出。至於定理1可從希爾伯脫-施密特公式得之。茲證之如次。

若 $\varphi(x)$ 與 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 都是正交的，則由希爾伯脫-施密特公式（§13，(8)），有

$$K\varphi=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_m)}{\lambda_m}\varphi_m(x)。$$

將這等式的兩邊乘以 $\overline{\varphi(x)}$ 而求其數量積。茲證右邊級數可能逐項求積分。事實上,令

$$R_p(x)=\sum_{m=p+1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_m)}{\lambda_m}\varphi_m(x),$$

於是有

$$(K\varphi,\varphi)=\sum_{m=n+1}^{p}\frac{|(\varphi,\varphi_m)|^2}{\lambda_m}+(R_p,\varphi)。\qquad (甲)$$

其次,由布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式

$$|(R_p,\varphi)|\leqslant\|R_p\|\cdot\|\varphi\|。$$

$\varphi_m(x)$ 是正交標準系,因此,由於帕爾斯窪爾等式

$$\|R_p(x)\|^2=\sum_{m=p+1}^{\infty}\frac{|(\varphi,\varphi_m)|^2}{\lambda_m^2}\leqslant\frac{1}{\lambda_{p+1}^2}\sum_{m=p+1}^{\infty}|(\varphi,\varphi_m)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\|\varphi^2\|}{\lambda_{p+1}^2}\to 0,\quad 當\quad p\to\infty。$$

在其時, $(R_p,\varphi)\to 0$; 在(甲)式中,令 $p\to\infty$, 我們得到

$$(K\varphi,\varphi)=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|(\varphi,\varphi_m)|^2}{\lambda_m}。$$

將一切 λ_m 最小的值代之,於是有

$$|(K\varphi,\varphi)|\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}\sum_{m=n+1}^{\infty}|(\varphi,\varphi_m)|^2,$$

若應用貝塞爾不等式,或為

$$|(K\varphi,\varphi)|\leqslant\frac{\|\varphi\|^2}{|\lambda_{n+1}|}。$$

最後,由於定理 2 的條件 $\|\varphi\|=1$, 則有

$$|(K\varphi,\varphi)|\leqslant\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}。$$

為了證明定理 1, 留下來的僅須注意在最後不等式中的等號可成立,只須令 $\varphi(x)=\varphi_{n+1}(x)$。

在實際上應用這兩個定理是有困難的，因為不能經常地決定有高度正確性的特徵函數。

我們指出一個方法，這個方法可能幫助我們決定從第二個起的一切特徵值，而不必應用特徵函數。為確定觀念起見，我們設 λ_1 是已知的，而需要求的是 λ_2 。寫出下差

$$B_{2m}=A_{2m}^2-A_{4m}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^{2m}}\right)^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^{4m}}=$$

$$=2\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{1<k<n}\frac{1}{\lambda_k^{2m}\lambda_n^{2m}}。\tag{4}$$

為了簡單化，設 λ_1 及 λ_2 都是簡單特徵值，且 $-\lambda_1$ 及 $-\lambda_2$ 皆不是特徵值。於是我們取 m 充分大，使(4)式的和中這個項 $\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}$ 大於這個和中的其他項；其餘的項與這個項比較皆小到可以略去。於是從(4)，我們得出下面近似等式：

$$\frac{1}{\lambda_1^{2m}\lambda_2^{2m}}\approx\frac{B_{2m}}{2},\tag{5}$$

且從此推得

$$|\lambda_2|\approx\frac{1}{|\lambda_1|}\sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}。\tag{6}$$

如果 λ_1 的眞值是已知的，則(6)式給出 $|\lambda_2|$ 的近似值，這個近似值比眞值小一些。

從(4)式出發，我們也不難得到比 $|\lambda_2|$ 的眞值大一些的近似公式：

$$|\lambda_2|\approx\frac{1}{|\lambda_1|}\sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}。\tag{7}$$

從近似公式(6)及(7)，有對應的極限形式的公式

$$|\lambda_2|=\frac{1}{|\lambda_1|}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2m]{B_{2m}}}=\frac{1}{|\lambda_1|}\lim_{m\to\infty}\sqrt{\frac{B_{2m}}{B_{2m+2}}}。\tag{8}$$

對於第二特徵值的計算，我們用討論過很多次的核

$$K(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x(2-s), & (x\leqslant s),\\ \dfrac{1}{2}s(2-x), & (s\leqslant x),\end{cases}$$

作爲例子。在這情況，有

$$B_2=A_2^2-A_4=\frac{1}{4050}。$$

取 $\lambda_1=4.115$ (閱 § 14)。在(6)式中令 $m=1$，於是得到

$$\lambda_2=\frac{1}{4.115}\sqrt{8100}=21.87。$$

更準確的值是 $\lambda_2=24.14$。

作爲第二個例子，求貝塞爾零級函數 $J_0(x)$ 的起始兩個根。這些根的平方是下對稱核

$$L(x,s)=\begin{cases}-\sqrt{xs}\ln s, & (x\leqslant s),\\ -\sqrt{xs}\ln x, & (x\geqslant s),\end{cases}$$

的特徵值(積分的限是 $a=0$, $b=1$)。

首先我們計算二次疊核 $L_2(x,s)$。設 $x>s$。於是有

$$L_2(x,s)=\int_0^s L(x,t)L(t,s)dt+\int_s^x L(x,t)L(t,s)dt+$$
$$+\int_x^1 L(x,t)L(t,s)dt=$$
$$=\sqrt{xs}\left\{\int_0^s t\ln x\ln s\,dt+\int_s^x t\ln x\ln t\,dt+\int_x^1 t\ln^2 t\,dt\right\}=$$
$$=\frac{\sqrt{xs}}{4}[(x^2+s^2)\ln x+1-x^2]。$$

現在經過簡單計算，給出：

$$A_2=\frac{1}{32},\quad A_4=\frac{11}{12288},\quad B_2=\frac{1}{12288}。$$

用下近似式 $$\lambda_1\approx\frac{1}{\sqrt[4]{A_4}},\quad \lambda_2\approx\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{2}{B_2}}。$$

則有：　　$\lambda_1 \approx 5.7813,\quad \lambda_2 \approx 27.117$。

將這兩個值開平方，我們得到貝塞爾零級函數的起始兩個根的近似值

$$\alpha_1 \approx 2.4044, \quad \alpha_2 \approx 5.2702,$$

這兩個近似值比眞值小一些。

從表中❶，我們檢查這兩個根更準確的值是

$$\alpha_1 = 2.4048, \quad \alpha_2 = 5.5200\text{。}$$

從相同理論出發，我們可建立與(6)式相似的公式以決定更大的特徵值。例如，對於 λ_3，我們不難求得它的近似式

$$|\lambda_3| \approx \frac{1}{|\lambda_1^2 \lambda_2|} \sqrt[2m]{\frac{8}{B_{2m}^2 - 2B_{4m}}}\text{。} \tag{9}$$

在(6)式同樣假設下，這個近似式有效。

§18．可對稱化的核　設核 $K(x, s)$ 有下形式

$$K(x, s) = r(s) L(x, s), \tag{1}$$

其中 $r(s) \geqslant 0$，且 $L(x, s)$ 是對稱的，也就是 $L(x, s) = \overline{L(s, x)}$。則很容易將下方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \tag{2}$$

變爲有對稱核的方程。將這方程的兩邊乘以 $\sqrt{r(x)}$，且將 $\psi(x) = \sqrt{r(x)}\, \varphi(x)$ 看作新未知函數。對於這個函數，我們得到積分方程

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sqrt{r(x) r(s)} L(x, s) \psi(s) ds = \sqrt{r(x)} f(x)\text{。} \tag{3}$$

這個最後方程的核已經是對稱的。

在應用方面常遇到形式如(1)的核。

§19．對稱積分方程的解　對稱積分方程是弗列德和蒙方程的特殊情況，故可根據一般定理以解對稱方程。然而此處我們提出另一個樣子的問題：任務是關於對稱方程來求解，我們將設核的一切特徵值及

---

❶ P. O. 庫茲明著貝塞爾函數，蘇聯國營技術理論出版社，1933。

特徵函數皆爲已知的。在這些條件之下,方程的求解問題變得特別簡單。

我們考慮下方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x), \tag{1}$$

其中核 $K(x,s)$ 是對稱的。設 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$ 是 $K(x,s)$ 的特徵值,而 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 是對應特徵函數。用 a_n 表示未知函數 $\varphi(x)$ 關於正交標準系 $\varphi_n(x)$ 的富里耶係數:

$$a_n=(\varphi,\varphi_n)=\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi_n(x)}dx。 \tag{2}$$

由於希爾伯脫-施密特定理,有

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x)。$$

現在從方程(1)推得

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n}\varphi_n(x), \tag{3}$$

於是留下來的僅是係數 a_n 的決定。爲了達到這個目的,我們將(3)式的兩邊乘以 $\overline{\varphi_m(x)}$,且從 a 至 b 取積分。因 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$,是一正交標準系,則在級數(3)中積分後保留下來的只有一項,這項的下標 $n=m$。由 a_n 的定義,我們得到:

$$a_m=f_m+\frac{\lambda}{\lambda_m}a_m;\quad f_m=(f,\varphi_m)。 \tag{4}$$

若 λ 不是特徵值,則我們從(4)立卽得出 a_m:

$$a_m=\frac{\lambda_m f_m}{\lambda_m-\lambda}。 \tag{5}$$

將這值代入(3)中,我們得到下形式的解:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x)。 \tag{6}$$

可能證明(6)式中的級數是絕對收斂的且一致收斂的。

現在設 λ 是特徵值。於是 λ 在敍列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 內，且此敍列可能取 λ 値幾次。設 $\lambda=\lambda_r=\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_{r'}$。對於下標 m 異於 $r, r+1, \cdots, r'$ 的係數 a_m 也由(5)式決定之。若 m 等於 $r, r+1, \cdots, r'$ 中的一個數，則等式(4)變爲 $f_m=0, m=r, r+1, \cdots, r'$。於是若 λ 是特徵值，當且僅當方程的自由項與這個特徵值對應的諸特徵函數成正交時，方程才可解。如果這條件滿足，則同一(6)式給出方程的解，其中有不定形 $\frac{0}{0}$ 的係數可用任意常數代之。

§20. 特徵值存在定理 這一節的目的是對於§12定理3給以證明。我們將這個證明放在本章之末，是因爲它是不簡單的且需要引入核的新概念。我們應指出關於連續對稱核的特徵值存在這個事實，可能用很初步方法來加以確定。相當的證明見於各種積分方程的教程中，如本書之末所列舉的參考文獻目錄。

在本節全部討論中，均值收斂的概念起着基本作用。若

$$\|\varphi_n-\varphi\|=\left\{\int_a^b |\varphi_n(x)-\varphi(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

則我們謂在閉區間 (a, b) 內，敍列 $\varphi_n(x)$ 均值收斂於 $\varphi(x)$。

同一敍列不能均值收斂於兩個相異函數：若 $\|\varphi_n-\varphi\|\to 0$ 及 $\|\varphi_n-\psi\|\to 0$，則由於三角不等式，有

$$\|\varphi-\psi\|=\|\varphi-\varphi_n-(\psi-\varphi_n)\|\leqslant\|\varphi-\varphi_n\|+\|\psi-\varphi_n\|\to 0。$$

於是推得 $\|\varphi-\psi\|=0$, 且 $\varphi\equiv\psi$。

有一個正確定理，這定理與柯西極限存在準則相似的。

一個平方可和函數列 $\varphi_n(x)$ 均值收斂於一個平方可和函數 $\varphi(x)$ 的必要且充分的條件是：

$$\lim_{m,n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi_m\|=0。$$

這個著名定理叫做費歇爾-銳斯定理。它的證明可在[7]中找到。

在本節中的任何地方，只要談到一個函數列收斂，就指的均值收斂

的意義。

設下級數

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x) \quad (1)$$

的部分和組成的函數列在閉區間 (a, b) 內均值收斂於一個函數 $v(x)$，則我們謂這個級數在同區間 (a,b) 內是均值收斂的，且其和等於 $v(x)$。

定理 1. 設級數(1)是均值收斂的，且設 $f(x)$ 是任意一個平方可和函數。則將級數(1)中的諸項乘以 $f(x)$ 之後可逐項求積分。

擺在我們面前的，是要證明下等式

$$\int_a^b v(x)f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)f(x)dx\text{。} \quad (2)$$

用 $v_n(x)$ 表示級數(1)的第 n 部分和。於是當 $n\to\infty$ 時，$\|v-v_n\|\to 0$。由此顯出，當 $n\to\infty$ 時，

$$|(v-v_n, \bar{f})|\leqslant\|v-v_n\|\cdot\|\bar{f}\|\to 0\text{。}$$

從而，有

$$(v, \bar{f})=\lim_{n\to\infty}(v_n, \bar{f})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u_n\bar{f})=\sum_{k=1}^{\infty}(u_n, \bar{f})\text{。}$$

由數量積定義，有

$$(v, \bar{f})=\int_a^b v(x)f(x)dx, \quad (u_n, \bar{f})=\int_a^b u_n(x)f(x)dx,$$

故最後等式與等式(2)相同。

若一個函數集中所有的函數的模成一有界集，則謂這個函數集是**有界**的。若從一個函數集的任一無限子集中，恆可能有一個收斂子函數列，則這個函數集叫做**緻密**集。任何一個正交標準系是有界函數集的例子，但它不是緻密集。正交標準系不是緻密集這一結果可從下面推知。若 $\varphi_n(x)$ 及 $\varphi_m(x)$ 是互爲正交的而且標準化了的兩個函數，則

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2=(\varphi_n-\varphi_m, \varphi_n-\varphi_m)=$$
$$=(\varphi_n, \varphi_n)+(\varphi_m, \varphi_m)-(\varphi_n, \varphi_m)-(\varphi_m, \varphi_n)=2,$$

不滿足費歇爾-銳斯定理中的條件。

定理 2. 弗列德和蒙算子

$$K\varphi=\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

可將任一有界函數集改變爲緻密函數集,但算子中的核須滿足下條件

$$\int_a^b\int_a^b |K^2(x,s)|\,dx\,ds=B^2<\infty \text{。}$$

換一句話說,設 Φ 是任意有界函數集(若 $\varphi\in\Phi$, 則 $\|\varphi\|<M$, $M=$ $=$常數), 則從 Φ 可能取出這樣一個函數列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使當 $n, m\to\infty$ 時,有

$$\|K\varphi_n-K\varphi_m\|=\|K(\varphi_n-\varphi_m)\|\to 0 \text{。}$$

我們寫 $K(x,s)$ 的富里耶級數如下形式:

$$K(x,s)\sim\sum_{i,k=0}^{\infty} A_{ik}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\cos\frac{k\pi s}{b-a},$$

且令
$$\sum_{i,k=0}^{j} A_{ik}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\cos\frac{k\pi s}{b-a}=P_j(x,s),$$

$$K(x,s)-P_j(x,s)=K'_j(x,s)\text{。}$$

由於帕爾斯窪爾等式,有

$$\lim_{j\to\infty}\int_a^b\int_a^b |K'_j(x,s)|^2\,dx\,ds=0 \text{。} \tag{3}$$

其次令
$$K\varphi=P_j\varphi+K'_j\varphi,$$

其中 $P_j\varphi$ 及 $K'_j\varphi$ 是弗列德和蒙算子, 這兩個算子的核分別是 $P_j(x,s)$ 及 $K'_j(x,s)$。設 $\varphi(x)$ 是所給函數集中的一個函數。我們寫出它的富里耶級數:

$$\varphi(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}\cos\frac{k\pi x}{b-a}\text{。}$$

於是由定理 1,

$$P_j\varphi=\sum_{i=0}^{j}\cos\frac{i\pi x}{b-a}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{ik}a^{(k)}(b-a)}{2}\text{。} \tag{4}$$

因
$$|a^{(k)}|=\frac{2}{b-a}\left|\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{b-a}\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{b-a}}\int_a^b|\varphi^2(x)|\,dx<M\sqrt{\frac{2}{b-a}},$$
故一切係數 $a^{(k)}$ 成一有界數集。

由於瓦也司脫拉司關於有界數集的極限存在的著名理論，則可能從所設集 Φ 中選擇這樣一個敍列 $\{\varphi_n\}$，使下面的極限

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)},\quad k=1,2,\cdots,j,$$

存在，其中 $a_n^{(k)}$ 是函數 $\varphi_n(x)$ 的第 k 個富里耶係數。於是(4)式指出當 $n\to\infty$ 時，$P_j\varphi_n$ 收斂於一個極限。

從集 Φ 中選擇一敍列 $\{\varphi_{1n}\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} P_1\varphi_{1n}$ 存在（在均值收斂意義下）。其次，從敍列 $\{\varphi_{1n}\}$ 中選擇一個部分敍列 $\{\varphi_{2n}\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} P_2\varphi_{2n}$ 存在。應注意的，敍列 $\{P_1\varphi_{2n}\}$ 是由於敍列 $\{P_1\varphi_{1n}\}$ 的一個部分敍列所組成，故也是收斂的。從敍列 $\{\varphi_{2n}\}$ 中選擇一個部分敍列 $\{\varphi_{3n}\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} P_3\varphi_{3n}$ 存在。依此類推。將這個方法繼續無限次，我們得到一個無限敍列集

$$\begin{array}{l}\varphi_{11},\varphi_{12},\cdots,\varphi_{1n},\cdots\\ \varphi_{21},\varphi_{22},\cdots,\varphi_{2n},\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{n1},\varphi_{n2},\cdots,\varphi_{nn},\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\tag{5}$$

每一敍列含在前面敍列之內，且僅當 $j\leqslant k$ 時，$P_j\varphi_{kn}$ 是收斂的，$n=1,2,\cdots$。考慮對角線敍列

$$\varphi_{11},\varphi_{22},\cdots,\varphi_{nn},\cdots,$$

除非這敍列的元素的個數是有限的，它的一切元素皆屬於(5)中某一個敍列。由此顯示出對於任何正整數 j，下極限

$$\lim_{n\to\infty} P_j\varphi_{nn}\tag{6}$$

存在。現在證明敍列 $\{K\varphi_{nn}\}$ 是收斂的。由三角不等式，有

$$\|K\varphi_{nn}-K\varphi_{mm}\| \leqslant \|K\varphi_{nn}-P_j\varphi_{nn}\|+\|P_j\varphi_{nn}-P_j\varphi_{mm}\|+ \\ +\|K\varphi_{mm}-P_j\varphi_{mm}\|。\quad (7)$$

我們有　$K\varphi_{nn}-P_j\varphi_{nn}=K'_i\varphi_{nn}=\int_a^b K'_j(x,s)\varphi_{nn}(s)ds$。

由布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式，推得

$$\|K\varphi_{nn}-P_j\varphi_{nn}\|^2 \leqslant \|\varphi_{nn}\|^2\int_a^b\int_a^b|K'_j(x,s)|^2dx\,ds< \\ <M^2\int_a^b\int_a^b|K'_j(x,s)|^2dx\,ds。$$

完全相同情況，也有

$$\|K\varphi_{mm}-P_j\varphi_{mm}\|^2<M^2\int_a^b\int_a^b|K'_j(x,s)|^2dx\,ds。$$

由於關係式(3)，可能選擇一個充分大的數 j，使不等式(7)的右邊的第一項和第三項皆小於 $\frac{\varepsilon}{3}$，其中 ε 是任意正數。固定這個 j 的值，利用極限(6)的存在性，可能選擇一個充分大的數 n_0，使當 $n\geqslant n_0$, $m\geqslant n_0$ 時，有 $\|P_j\varphi_{nn}-P_j\varphi_{mm}\|<\frac{\varepsilon}{3}$。現在，若 $n\geqslant n_0$, $m\geqslant n_0$，則有 $\|K\varphi_{nn}-K\varphi_{mm}\|<\varepsilon$。從費歇爾-銳斯定理，則下極限

$$\lim_{n\to\infty}K\varphi_{nn}$$

存在。現在從事於§12定理3的證明。考慮一個函數集這集中的函數 $\varphi(x)$ 的模等於1。用 μ 表示 $|(K\varphi,\varphi)|$ 的上確界。由上確界定義，存在着一個函數列 $\psi_n(x)$，這函數列中的函數的模皆等於1，且滿足下關係

$$\lim_{n\to\infty}|(K\psi_n,\psi_n)|=\mu。\quad (8)$$

我們原設核 $K(x,s)$ 是對稱的。在這樣情況，數量積 $(K\psi_n,\psi_n)$ 是實數，且僅有三種可能情況：

(a) $\lim(K\psi_n,\psi_n)=\mu$,

(б) $\lim(K\psi_n,\psi_n)=-\mu$,

(в) 敍列 $\psi_n(x)$ 可能分裂爲兩個敍列 $\psi'_n(x)$ 及 $\psi''_n(x)$，使

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n', \psi_n') = \mu, \quad \lim_{n\to\infty}(K\psi_n'', \psi_n'') = -\mu \text{ 。}$$

我們僅討論情況(a)。如果將積分方程中的 λ 代爲 $-\lambda$, 且將 $K(x,s)$ 代爲 $-K(x,s)$, 則情況(б)卽歸之於情況(a)。而在情況(в)內只要討論敍列 $\psi_n'(x)$。

由定理 2, 從敍列 $\{\psi_n(x)\}$ 中可能取出一個部分函數列,我們仍然用 $\{\psi_n(x)\}$ 表示這個部分函數列,使下面的極限

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} K\psi_n$$

存在。

其次, 設 $\eta_n(x)$ 是一個任意函數, 它在閉區間 (a,b) 爲平方可和, 且設 t 是任一實數。函數 $\dfrac{\psi_n(x)+t\eta_n(x)}{\|\psi_n+t\eta_n\|}$ 的模顯等於 1 。由 μ 的定義,有

$$\left(K\frac{\psi_n+t\eta_n}{\|\psi_n+t\eta_n\|}, \quad \frac{\psi_n+t\eta_n}{\|\psi_n+t\eta_n\|}\right) \leqslant \mu \text{ 。}$$

由此我們不難推得

$$(K(\psi_n+t\eta_n), \psi_n+t\eta_n) \leqslant \mu(\psi_n+t\eta_n, \psi_n+t\eta_n)\text{。}$$

解括弧,且注意 $(\psi_n, \psi_n) = \|\psi_n\|^2 = 1$, 我們得到

$$(K\psi_n, \psi_n) - \mu + 2t\mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n) +$$
$$+t^2[(K\eta_n, \eta_n) - \mu\|\eta_n\|^2] \leqslant 0 \text{ 。}$$

此最後不等式的左邊是關於 t 的二次三項式, 這不等式表示這個二次三項式的符號保持不變。在這樣情況,它的判別式不爲負,卽:

$$|\mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n)}\sqrt{\mu - (K\psi_n, \psi_n)}\text{。} \qquad (9)$$

現在設 η_n 是這樣函數,使

$$\mu\|\eta_n\|^2 - (K\eta_n, \eta_n) < C, \qquad (10)$$

其中 C 是不依賴於 n 的常數。於是從(8)及(9)推得

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(K\psi_n - \mu\psi_n, \eta_n) = 0 \text{ 。} \qquad (11)$$

現在令 $\eta_n(x) = K\psi_n - \mu\psi_n = -\mu\psi_n(x) + \int_a^b K(x,s)\psi_n(s)ds$ 。

我們證明這樣的 η_n 可使不等式(10)成立。因 $\|\psi_n\|=1$，由三角不等式，有

$$\|\eta_n\|\leqslant\mu+\left\|\int_a^b K(x,s)\psi_n(s)ds\right\|。$$

其次，

$$\left|\int_a^b K(x,s)\psi_n(s)ds\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b|\psi_n^2(s)|ds\int_a^b|K^2(x,s)|ds=\int_a^b|K^2(x,s)|ds。$$

對 x 取積分且開平方，我們得

$$\left\|\int_a^b K(x,s)\psi_n(s)ds\right\|\leqslant B。\tag{12}$$

這樣一來，有 $\|\eta_n\|\leqslant\mu+B$。現在

$$\mu\|\eta_n\|^2-(K\eta_n,\eta_n)\leqslant\mu(\mu+B)^2+(\mu+B)\|K\eta_n\|。$$

其次，

$$|K\eta_n|=\left|\int_a^b K(x,s)\eta_n(s)ds\right|\leqslant\int_a^b|\eta_n(s)|^2ds\int_a^b|K^2(x,s)|ds\leqslant$$

$$\leqslant(\mu+B)^2\int_a^b|K^2(x,s)|ds,$$

如上所述，我們有

$$\|K\eta_n\|<B(\mu+B),\tag{13}$$

最後，有 $$\mu\|\eta_n\|^2-(K\eta_n,\eta_n)<(\mu+B)^3。$$

現在關係(11)取下形式

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(K\psi_n-\mu\psi_n,\ K\psi_n-\mu\psi_n)=0。$$

但此最後式中的數量積是正數，且等於 $\|K\psi_n-\mu\psi_n\|^2$。由此推得

$$\lim_{n\to\infty}\|K\psi_n-\mu\psi_n\|=0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty}(K\psi_n-\mu\psi_n)=0。\tag{14}$$

於是有 $$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu}K\psi_n=\frac{1}{\mu}\omega(x)。$$

記 $\frac{1}{\mu}\omega(x)=\varphi_1(x)$。於是 $\psi_n(x)\to\varphi_1(x)$。顯然有 $\|\varphi_1\|=1$。應用不等式(12)及(13)重複推論，不難得到 $K\psi_n\to K\varphi_1$。在(14)式取極限以後，令 $\frac{1}{\mu}=\lambda_1$，我們得

$$\varphi_1(x)-\lambda_1K\varphi_1=0\text{。} \tag{15}$$

因 $\varphi_1(x)$ 的模等於1，故它不恆等於零。於是從(15)顯出 λ_1 是核 $K(x,s)$ 的特徵值。這樣一來，§12 定理3以及§12 定理1皆得到證明。

第三章　奇性積分方程

§21. 積分主值　尋常定積分是和的極限的定義，僅適用於有界函數。但如果被積函數不是有界的，我們引入"廣義積分"的概念。我們回憶這概念的內容。

設 $f(x)$ 確定在閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 內，而在此區間內一點 c 的隣區內不是有界的，但它在每個閉區間 $a\leqslant x\leqslant c-\varepsilon'$ 及 $c+\varepsilon''\leqslant x\leqslant b$ 內爲可積，無論正數 ε' 及 ε'' 如何小。寫出下和

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon''}^b f(x)dx。\tag{1}$$

當 ε' 及 ε'' 皆互不倚賴地趨向於零時，若這個和有極限，則這極限叫做函數 $f(x)$ 的廣義積分：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon''\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon''}^b f(x)dx\right]。\tag{2}$$

可能發生這樣事情，當 ε' 及 ε'' 互不倚賴地趨於零時，(1)中的和的極限不存在，但如果 ε' 及 ε'' 之間存在某個關係而趨於零時，(1)的極限存在。例如，$f(x)=\dfrac{1}{x-c}$，$a<c<b$。我們有：

$$\int_a^{c-\varepsilon'}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon''}^b\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}。\tag{3}$$

當 ε' 及 ε'' 趨於零時，因此 $\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ 是不定形，故(3)式的極限不存在。然而，若 ε' 及 ε'' 之間有一關係，例如，$\varepsilon'=k\varepsilon''$，其中 k 是一正數，則(3)的極限存在，且等於

$$\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln k。$$

在特別情況，若令 $\varepsilon'=\varepsilon''=\varepsilon$，則我們得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\frac{b-c}{c-a}。\tag{4}$$

現在我們引入下定義。

設函數 $f(x)$ 確定在閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 內，且無論 ε 是任何小的正數，$f(x)$ 在每個閉區間 $a\leqslant x\leqslant c-\varepsilon$ 及 $c+\varepsilon\leqslant x\leqslant b$ 內爲可積，則下極限（若它存在）

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right]\tag{5}$$

叫做函數 $f(x)$ 在區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 內的**積分主值**。積分主值的概念與這個名詞本身皆由柯西氏所首創。我們將常用“**奇性積分**”這個名詞以替代“積分主值”❶。

我們將用尋常積分的記號

$$\int_a^b f(x)dx$$

以表示積分主值。但也用下面各種記號

$$\text{V. P.}\int_a^b f(x)dx;\quad \int_a^{\prime b} f(x)dx,\quad \int_a^{*b} f(x)dx;$$

然而這些記號並不是必需的。

應注意的，如果尋常積分（常義的或廣義的）存在，則積分主值與積分的值是相同的。

現在我們應指出積分主值存在這一類的積分，在應用上是很廣泛的而且很重要的。

首先，從（4）式推得下面奇性積分

$$\int_a^b\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{b-x}{x-a},\quad a<x<b,\tag{6}$$

存在。

❶ 有時用“特殊積分”這個名詞（例如，在 И. И. 普利瓦諾夫著作中）。

現在設函數$f(x)$滿足所謂有指數α的李勃息茨條件。這個條件是如下面所說的：設存在着兩個常數K及α，$0<\alpha\leqslant 1$，使對於區間$a\leqslant x\leqslant b$內的任意一對值x'，x''；有下不等式

$$|f(x')-f(x'')|<K|x'-x''|^{\alpha}。\qquad (7)$$

凡滿足有指數α的李勃息茨條件下一切函數作爲一類，我們用$\mathrm{Lip}\,\alpha$記這個函數類；若$f(x)$屬於$\mathrm{Lip}\,\alpha$，則將記作

$$f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha。$$

若$f(x)$在區間$a\leqslant x\leqslant b$內有有界微商，則$f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$。這結論從拉哥朗日有限增量公式立卽顯出。

定理 1. 若$f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$，則對於開區間$a<x<b$內的一切值$x$，下面奇性積分

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}dt \qquad (8)$$

存在。

證明 是很簡單的。將積分(8)寫作下形式

$$\int_a^b \frac{f(t)-f(x)}{t-x}dt+f(x)\int_a^b \frac{dt}{t-x}。$$

在第一個積分中的被積函數有下估計

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right|<K|t-x|^{\alpha-1}。$$

因之，當$\alpha<1$時可看作廣義積分，而當$\alpha=1$時看作尋常積分，在任何情況下它都存在的。由於(6)式第二積分也存在。

積分主值的概念很容易推廣到境界積分。注意到應用，我們對於複變數函數的積分敍述這個概念。設L是一條有連續曲率的平滑曲線(閉或非閉)，且c是在L上的任意一點。以c點作中心ε作半徑的圓將c點包圍起來。以L_ε表示曲線L遺留下來的部分。設對於任何正數ε，$f(z)$沿L_ε爲可積。我們稱下極限(設它存在)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L_\varepsilon} f(z)dz$$

是 $f(z)$ 沿境界 L 的積分主値，或奇性積分。我們把它記爲

$$\int_L f(z)dz。$$

若對於曲線 L 上的任意兩點 z', z'', 有下不等式

$$|f(z')-f(z'')|<K|z'-z''|^\alpha, \tag{9}$$

其中 K 及 α 都是常數，且 $K>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, 則謂 $f(z)$ 在曲線 L 上滿足有指數 α 的李勃息茨條件，且以記號 $f(z)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ 表示這個情況。有一正確定理，這定理與定理 1 相似。

定理 2. 若 $f(z)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, 則對於曲線 L 上的一切點 z, 端點可能除外，奇性積分

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{10}$$

存在。

當 x 在開區間 $a<x<b$ 內變動時，積分(8)是 x 的函數。記作

$$f_1(x)=\int_a^b \frac{f(t)}{t-x}dt。$$

關於 $f_1(x)$ 我們有下面正確的定理❶。

定理 3. (И. И. 普利瓦諾夫), 設 $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha<1$, 則在閉區間 $a_1\leqslant x\leqslant b_1$ 內的一切值 x, 其中 $a_1>a$ 及 $b_1<b$, 我們有: $f_1(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$; 但若 $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$, 則在同區間 $a_1\leqslant x\leqslant b_1$ 內，我們有: $f_1(x)\in \mathrm{Lip}\,\beta$, 此處 β 是小於 1 的某一正數。

相似的定理對於積分(10)也有效的。在這時，若 L 是閉境界，則

$$f_1(z)=\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

❶ 參閱 И.И. 普利瓦諾夫著的複變函數引論，第八版，蘇聯國營技術理論出版社，1948。

在全部境界 L 上屬於類 Lip α，或對應的類 Lip β。

由上述結果可得到下面定理。爲了避免重複，我們僅對於積分(3)敍述這個定理，然而它對於積分(10)也是有效的。

定理 4. 設在閉區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 內，$f(x)\in\text{Lip}\,\alpha$。令

$$f_1(x)=\int_a^b\frac{f(t)}{t-x}dt,$$

$$f_2(x)=\int_a^b\frac{f_1(t)}{t-x}dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f_n(x)=\int_a^b\frac{f_{n-1}(t)}{t-x}dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

則在開區間 $a<x<b$ 內，諸奇性積分 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\cdots$ 都存在；在每一閉區間 $a_1\leqslant x\leqslant b_1$ 內的一切值 x，其中 $a_1>a$ 及 $b_1<b$，我們有：當 $\alpha<1$ 時，$f_n(x)\in\text{Lip}\,\alpha$；而當 $\alpha=1$ 時，$f_n(x)\in\text{Lip}\,\beta$，此處 β 是小於 1 的某一正數。

§22. 柯西核與希爾伯脫核 奇性積分的概念在實用問題中起着重要作用，而以複變函數論中下面的定理作基礎的。

定理 設 L 是任意一條光滑的閉境界，$\varphi(\zeta)$是確定在 L 上且滿足有指數 α 的李勃息茨條件的一個函數，$0<\alpha\leqslant1$。當點 z 從境界 L 的內部或對應地從 L 的外部趨近於 L 上的任意一點 t 時，則下面的柯西型積分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{1}$$

趨於下面的極限值

$$F_i(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta, \tag{2}$$

或對應的下面的極限值

$$F_e(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta, \tag{3}$$

其中在(2)式及(3)式內的積分都是奇性積分。

關於這個定理,我們有幾點注意。

首先,須假定境界 L 取正向,也就是由 L 所圍成的區域恆保持在左邊。(2)式的下標 i 表示 z 從 L 的內部趨於 t,而(3)式的 e 表示 z 從 L 的外部趨於 t。此外,此處所謂 z 趨於 t,是要認爲點 z 所沿的曲線不與 L 相切,否則可能影響定理的正確性。最後,L 可能由於幾個不同的閉曲線所組成。

對於這個定理,我們不予以證明,因它可在任何一本複變函數論的教程中找到。

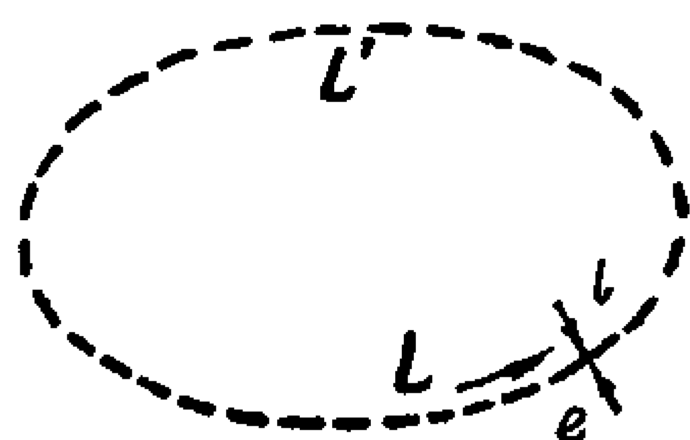


圖 3

應注意的是境界 L 爲非閉的特別情況。

若 L 是一條簡單弧(圖3),則"L 的內部"及"L 的外部"的概念喪失了意義,然而(2)式及(3)式仍有效。我們用下述方法來確定方向 i 及 e。對於 L 附加上一條弧 L',使 L 及 L' 合成一條閉境界,且沿着這境界取逆時針方向,且設 D 是這個境界所圍成的區域。於是在(2)式及(3)式中的 i 及 e 就認爲是在區域 D 的內部或對應地 D 的外部的意義。

下面的表示式

$$\frac{d\zeta}{\zeta-t} \tag{4}$$

叫做柯西核,其中 ζ 及 t 是境界 L 上的任意兩點。

我們稱下表示式

$$\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma \tag{5}$$

爲希爾伯脫核,其中 s 及 σ 皆爲實變數,且皆在閉區間 $[0, 2\pi]$ 內變動。這個核起着重要作用,它也和解析函數的理論有着密切的聯繫。我們將確定這個關係。

我們從博哇松積分

$$U(r, s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\sigma-s)}d\sigma$$

出發。這裏用 $u(\sigma)=U(1,\sigma)$ 表示在圓 $r<1$ 內的調和函數 $U(r, s)$ 在這個圓周上的值。令 $re^{is}=z$, $e^{i\sigma}=\zeta$。於是我們很容易得到

$$U(r, s)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\sigma)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\},$$

其中 γ 是圓周 $|\zeta|=1$。

用 $V(r, s)$ 記作 $U(r, s)$ 的調和共軛函數。於是除差一個常數外,$V(r, s)$ 可完全決定。我們選擇這個常數使它滿足一個條件,就是 $V(r, s)$ 在圓心的值等於零。於是有

$$U(r,s)+iV(r, s)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u(\sigma)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}。$$

現在令 $r\to1$,使點 z 是從圓的內部趨於圓周 γ 上的任一點。應用公式(2),經過初等變換之後,我們得到

$$v(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma, \tag{6}$$

其中 $v(s)=V(1, s)$ 是調和函數 $V(r, s)$ 在圓周 γ 上的極限值。

公式(6)顯出希爾伯脫核與在圓的內部的調和共軛函數的極限有那樣密切的聯繫,且這個調和共軛函數 $V(r, s)$ 服從下條件

$$V(r, s)|_{r=0}=0。 \tag{7}$$

希爾伯脫核及柯西核的二者之間有很簡單的關係。設 L 是一條簡單閉境界,它是有連續曲率的一條平滑曲線。設 L 的參數方程是

$$x=x(s), \quad y=y(s)。$$

設相應的參數 s 在閉區間 $[0, 2\pi]$ 內變動。記 $t=x+iy$ 及 $t(s)=x(s)+$ $+iy(s)$。境界 L 的方程可寫作 $t=t(s)$ 的形式。設 ζ 是 L 上的任一點，則參數有一值 σ，使 $\zeta=t(\sigma)$。於是不難證明下式

$$\frac{d\zeta}{\zeta-t}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+P(s, \sigma)d\sigma, \tag{8}$$

其中 $P(s,\sigma)$ 是兩個變數 s 及 σ 的連續函數，這函數滿足有某正指數的李勃息茨條件。

§ 23. 複合奇性積分的公式 設

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,\\ \varphi_2(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 L 是閉境界。不論 L 由一條或幾條閉曲線所組成，下面的推理沒有改變。我們的要求是如何用 $\varphi(t)$ 直接地來表示 $\varphi_2(t)$。考慮下面的柯西型積分：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。$$

由 § 22 中(2)式，有

$$f_i(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,\quad f_{1i}(t)=\frac{1}{2}\varphi_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta。$$

由 $\varphi_1(t)$ 及 $\varphi_2(t)$ 的定義，我們有：

$$\varphi_1(t)=f_i(t)-\frac{1}{2}\varphi(t),\quad \varphi_2(t)=f_{1i}(t)-\frac{1}{2}\varphi_1(t)。\tag{2}$$

將(2)式中的 $\varphi_1(t)$ 代入 $f_1(z)$ 中，則得：

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f_i(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。\tag{3}$$

(3)式中第一積分是柯西型積分，因爲它的密度❶ $f_i(\zeta)$ 是在 L 的內部

❶ 我們稱柯西型積分 $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 中的 $\mu(\zeta)$ 爲這積分的密度。

爲解析的函數$f(z)$的極限。因此，這個積分等於$f(z)$。(3)中第二積分顯然等於$\frac{1}{2}f(z)$。於是$f_1(z)=\frac{1}{2}f(z)$，且$f_{1i}(t)=\frac{1}{2}f_i(t)$。現在從(2)推知

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{2}f_i(t)-\frac{1}{2}\left[f_i(t)-\frac{1}{2}\varphi(t)\right]=\frac{1}{4}\varphi(t)。$$

我們得到普安加勒-伯爾脫朗的複合奇性積分的公式:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta=\frac{1}{4}\varphi(t)。\tag{4}$$

應注意的,(4)式中的二重積分的次序不能交換。因若變更(4)式中的積分次序,則得到積分

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L\varphi(\zeta)d\zeta\int_L\frac{d\tau}{(\zeta-\tau)(\tau-t)},$$

而這個積分的值等於零。事實上,若$\zeta\neq t$, 則有

$$\int_L\frac{d\tau}{(\zeta-\tau)(\tau-t)}=\frac{1}{\zeta-t}\left\{\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}-\int_L\frac{d\tau}{\tau-\zeta}\right\}。$$

在§22的(1)式中，令$\varphi(\zeta)\equiv 1$。若z在L的內部，則$F(z)=1$; 在§22的(2)式中以τ代替ζ，則得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}。$$

相似情況,也有
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{1}{2}。$$

從而有
$$\int_L\frac{d\tau}{(\zeta-\tau)(\tau-t)}=0,\quad \zeta\neq t。$$

我們引到有希爾伯脫核的複合奇性積分的公式。令

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(s)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}d\sigma,\\ \varphi_2(s)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_1(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}d\sigma。\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

用 $U(r,s)$, $U_1(r,s)$, $U_2(r,s)$表示在圓 $r<1$ 內的調和函數,而在圓周 $r=1$ 上,這三個函數的值分別等於 $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$。於是 $U_1(r,s)$ 是 $U(r,s)$的調和共軛函數,而 $U_2(r,s)$是 $U_1(r,s)$的調和共軛函數。

從柯西-黎曼方程,不難得到

$$U_2(r,s)=-U(r,s)+C,\quad C=\text{常數}。$$

在 § 22 內指出的關係,常數 C 由條件 $U_2(r,s)\big|_{r=0}=0$ 決定之。於是有

$$C=U(r,s)\big|_{r=0}。$$

但調和函數在圓中心的值等於它在圓周上的值的算術平均值。由此推得

$$C=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(1,\sigma)d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma。$$

現在,有 $U_2(r,s)=-U(r,s)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma$。

在這等式中,命 $r=1$。因 $U(1,s)=\varphi(s)$, $U_2(1,s)=\varphi_2(s)$,則最後得到

$$\varphi_2(s)=-\varphi(s)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma。$$

將(5)式中的 $\varphi_2(s)$代入,然後將 $\varphi_1(s)$代為(5)中的奇性積分形式,我們得到希爾伯脫公式:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta-s}{2}d\theta\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}d\sigma=$$

$$=-\varphi(s)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma。\qquad(6)$$

在複合積分中,如果一個是奇性積分,而另一個是尋常積分;則情況更為簡單。設 $H(s,\sigma)$是滿足李勃息茨條件的函數,於是下面的二重積分

$$F(s)=\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta-z}{2}d\theta\int_0^{2\pi}H(\theta,\sigma)d\sigma$$

可能交換積分的次序,且 $F(s)$滿足李勃息茨條件。相似定理對於有柯

西核的積分也有效。詳細的證明，可在文獻[28f]中找到。

§24. 有希爾伯脫核的奇性積分方程 我們將討論下形式的方程

$$a\varphi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\int_0^{2\pi}K(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma=f(s), \quad (1)$$

其中 a 及 b 是常數，一般地說它們是複數。

關於核 $K(s,\sigma)$，我們設它滿足李勃息茨條件。對於自由項 $f(s)$ 我們也有相同的假設。

首先，我們設 $K(s,\sigma)\equiv 0$，因此我們討論的方程是

$$L\varphi=a\varphi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=f(s)。\quad (2)$$

用下述方法來解這個方程。

令

$$M\omega=a\omega(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma, \quad (3)$$

其中 $\omega(\sigma)$是任意函數。將方程(2)的兩邊運用算子(3)，我們得到新方程

$$ML\varphi=F(s), \quad F(s)=Mf,$$

應用希爾伯脫公式，不難得到

$$(a^2+b^2)\varphi(s)-\frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma=F(s)。\quad (4)$$

若 $a^2+b^2\neq 0$，則最後方程是一個有簡單形式核的弗列德和蒙方程。

我們證明，僅須 $a\neq 0$，方程(4)與方程(2)是等價的。爲了這個目的，我們將(4)再寫爲次形式 $ML\varphi-Mf=0$，或 $M(L\varphi-f)=0$。記 $L\varphi-f=\omega$，我們得到方程 $M\omega=0$，或更詳細地寫作

$$a\omega(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=0。$$

對這個方程的兩邊，運用下面算子

$$a\psi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(s)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}ds\ .$$

於是得到 $\omega(s)$ 必須適合的方程：

$$a\left[a\omega(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\left[a\omega(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\sigma}{2}d\theta\right]=0\ 。$$

去括弧，且應用希爾伯脫公式變換二重積分。我們得到

$$(a^2+b^2)\omega(s)-\frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)d\sigma=0\ 。\qquad(甲)$$

由此推得 $\omega(s)=$ 常數。在(甲)式中，令 $\omega(s)=\omega(\sigma)=C$，我們得出 $a^2C=0$，或 $C=0$。現在有 $\omega(s)=0$，或 $L\varphi-f=0$，亦卽從方程(4)推到方程(2)。另一方面，方程(4)顯然是方程(2)的結果，因此這兩個方程是等價的。

用§4.中的方法以解方程(4)，我們得到需要的解

$$\varphi(s)=\frac{a}{a^2+b^2}f(s)-\frac{b}{2\pi(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+$$

$$+\frac{b^2}{2\pi a(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma\ 。\qquad(5)$$

若 $a^2+b^2=0$，我們可能證明在一般情況方程(2)沒有解。

注意特殊情況 $a=0$。設 $b=1$，這個假設顯不影響普遍性，我們得到第一種方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=f(s)。\qquad(6)$$

在這樣情況，(5)式的解是無用的。但方程(6)的解不難直接求得。將(6)式中的字母 σ 及 s 分別換作 θ 及 σ，然後將兩邊乘以

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}ds$$

且在區間$(0,2\pi)$內取積分。應用希爾伯脫公式，得到

$$\varphi(s)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds=F(s),\quad F(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma。\quad (7)$$

這方程不難求解。令

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds=C,$$

於是，有

$$\varphi(s)-C=F(s)。$$

將這方程自 0 至 2π 取積分，我們得到下面的等式

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(s)ds。\quad (8)$$

不難檢驗不論函數$f(s)$如何，方程(8)恆成立。常數C是任意的，於是得到

$$\varphi(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+C。\quad (9)$$

將這個解代入(6)式，我們確信當且僅當下條件

$$\int_0^{2\pi}f(s)ds=0\quad (10)$$

滿足時，(9)是(6)的解。於是(10)是方程(6)有解的必要且充分的條件。

在一般情況，我們將方程(1)的兩邊運用算子(3)，則得到一般形式的弗列德和蒙積分方程。於是歸之於解這個方程。可能證明這個弗列德和蒙方程及方程(1)是等價的。

最後，關於下面的更一般形式的奇性方程：

$$a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\int_0^{2\pi}K(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma=f(s)\quad (11)$$

略予討論，其中係數a及b是變量。若$a(s)$及$b(s)$滿足李勃息茨條件，則對於(11)式的兩邊運用下面算子

$$M\omega=a(s)\omega(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma,$$

我們得到弗列德和蒙型積分方程。然而它與方程(11)可能不是等價的。

§ 25. 有柯西核的奇性積分方程 下形式的奇性方程

$$a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=f(t) \tag{1}$$

也可用很簡單的方法解之，其中 a 及 b 是常數，L 是閉境界[1]。對於方程(1)的兩邊，運用下算子

$$M\omega=a\omega(t)-\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta, \tag{2}$$

應用普安加勒-貝爾脫朗公式，不難得到：

$$(a^2-b^2)\varphi(t)=af(t)-\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta。$$

若 $a^2-b^2\neq0$，我們得到：

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta。 \tag{3}$$

將 $\varphi(t)$ 代入方程(1)，則示知(3)式中的函數確實適合方程(1)。$a=$ $=0$ 的情況這次不算作例外。

對於更一般形式的方程：

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+\int_L K(t,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta=f(t), \tag{4}$$

$$a^2(t)-b^2(t)\neq0,$$

我們也運用下算子

$$M\omega=a(t)\omega(t)-\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta,$$

則得到弗列德和蒙方程。若 a 及 b 是常數，則得到的弗列德和蒙方程與方程(4)是等價的。在一般情況，這問題需要補充說明。

§ 26. 非閉的單連通境界的情況 若境界 L 是非閉的，則普安加勒-貝爾脫朗公式無效，且 § 25 中解奇性積分方程的方法在這情況也

[1] L 由一條或幾條閉曲線所組成，不影響以後的討論。

宣告無效。此處我們採用另一方法，這個方法係將奇性方程的討論歸之於所謂黎曼問題❶。應注意的，這個方法也可應用到 L 是閉境界的情況。

設 L 是一條有連續曲率的簡單平滑弧。我們討論下方程

$$a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=f(t)。\tag{1}$$

為簡單起見，我們設 a 及 b 是常數，且 $a^2-b^2\neq 0$。

作為新未知函數，我們引用以 $\varphi(\zeta)$ 為密度的柯西型積分：

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。\tag{2}$$

從 § 22 中(2)式及(3)式，有：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t)&=F_i(t)-F_e(t),\\ \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta&=F_i(t)+F_e(t)。\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

將這兩式代入(1)，我們得到下面的等式：

$$(a+b)F_i(t)-(a-b)F_e(t)=f(t)。\tag{4}$$

這樣一來，我們引向到黎曼問題：求函數 $F(z)$，使這個函數在境界的內部及境界的外部的極限值滿足(4)式所規定的線性關係。

設

$$F(z)=\Phi(z)\omega(z),\tag{5}$$

且選擇 $\omega(z)$ 使滿足下式

$$(a+b)\omega_i(z)=(a-b)\omega_e(z)。\tag{6}$$

因此，函數 $\omega(z)$ 是齊次黎曼問題的解。

考慮函數

$$\omega(z)=\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m,\tag{7}$$

其中 α 及 β 是 L 的起點及終點，m 是某一個常數。這個函數的每一支

❶ 在穆斯黑里施維利書中 [28 f]，這個名詞叫做希爾伯脫問題。

在沿着 L 所割裂的平面內是正則的。我們選擇任一支，例如，當 $z=\infty$ 時它等於 1 的一支。當點 z 逆時針方向圍繞點 α 轉一週時，則 $\omega(z)$ 的值須乘以因子 $e^{2\pi im}$。於是有

$$\omega_e(z)=e^{2\pi im}\omega_i(z)。$$

現在從下條件

$$e^{2\pi im}=\frac{a+b}{a-b} \tag{8}$$

來決定 m 的值。於是函數（7）滿足方程（6）。從方程（8），則除相差一任意整數外，m 可由下式決定之

$$m=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a+b}{a-b}。 \tag{9}$$

選擇這個整數，使

$$0\leqslant \mathrm{Re}(m)<1。$$

爲了這樣，我們只須取 $\frac{a+b}{a-b}$ 的幅角在 0 及 2π 之間。當我們這樣選定 m 後，函數 $\omega(z)$ 及 $\frac{1}{\omega(z)}$ 沿着 L 都是絕對可積的。

現在將所得的 $\omega(z)$ 代入（5），然後再代入（4），我們得到：

$$\Phi_i(t)-\Phi_e(t)=\frac{f(t)}{a+b}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^m。 \tag{10}$$

這樣就很容易簡化黎曼問題的解。正如公式（3）指出，$\Phi(z)$ 可能取下形式的柯西型積分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}。 \tag{11}$$

現在，有

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}。 \tag{12}$$

應用（3）式中第一式，則求得積分方程（1）的解：

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2+b^2}f(t)-$$

$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\left(\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right)^m\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-t}。 \tag{13}$$

一般地講，解(13)不是唯一決定的。爲了使我們確信這個事實，考慮齊次方程

$$a\varphi_0(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=0\text{。}\tag{14}$$

應用相同方法，設

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\tag{15}$$

$$F_0(z)=\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m\Phi_0(z)\text{。}\tag{16}$$

應注意的，當 $z=\infty$ 時，$F_0(z)$從而 $\Phi_0(z)$皆變爲零。現在我們引出下面的方程：

$$\Phi_{0i}(t)-\Phi_{0e}(t)=0\tag{17}$$

以替代(10)。這樣一來，$\Phi_0(z)$在弧 L 不同的兩邊有相同值。從這裏我們不難斷言 $\Phi_0(z)$在全平面上是正則的，但 α 及 β 兩點可能除外。我們需要設下乘積

$$\varphi_0(t)\ln\frac{t-\alpha}{t-\beta}$$

沿 L 是絕對可積的。

設 z_1 及 z_2 是在 z 平面上且在 L 之外的任意兩點。將(15)式沿着連接 z_1 及 z_2 兩點且與 L 無公共點的路線取積分，則有

$$\int_{z_1}^{z_2}F_0(z)dz=\int_\alpha^\beta\varphi_0(\zeta)\ln\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2}d\zeta\text{。}$$

令 $z_1\to\alpha$, $z_2\to\beta$，我們得到 $F_0(z)$沿着連接 α 及 β 兩點且與 L 無其他公共點的任何路線的積分。從而示知不定積分

$$\int F_0(z)dz$$

在 α 及 β 兩點是有界的。如果 α 及 β 是 $\Phi_0(z)$ 的本性奇點，則這情況是不可能的。於是它們僅可能是 $\Phi_0(z)$的極點。設 m 的實數部分異於

零，且 $0<\mathrm{Re}(m)<1$。因積分 $\int_\alpha^\beta F_0(z)dz$ 是有限值，則轉向到(16)式，我們不難得到 β 是 $\Phi_0(z)$ 的正則點，而 α 是 $\Phi_0(z)$ 的簡單極點或正則點。最後，$\Phi_0(\infty)=0$。從上述的一切，得到

$$\Phi_0(z)=\frac{c'}{z-\alpha},\quad c'=\text{常數。} \tag{18}$$

現在，有
$$F_0(z)=\frac{c'}{(z-\alpha)^{1-m}(z-\beta)^m},$$

且從(3)式中第一式，我們得到齊次奇性方程(14)的解：

$$\varphi_0(t)=\frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m},\quad c=c'(1-e^{2\pi im})\text{。} \tag{19}$$

方程(1)的通解由下式給出：

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\left(\frac{t-\alpha}{t-\beta}\right)^m\int_L\left(\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-t}+$$
$$+\frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}, \tag{20}$$

其中 c 是任意常數。我們可能選擇這個常數，使 $\varphi(t)$ 在弧 L 的一個端點或另一端點處是有界的。

可能有另一個表達式以替代(13)，而在這式中含有 α 及 β 更對稱的形式。設

$$\Psi(z)=(z-\alpha)^{1-m}(z-\beta)^m F(z)\text{。} \tag{21}$$

將這函數代入(4)，得到：

$$\Psi_i(t)-\Psi_e(t)=\frac{1}{a+b}f(t)(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m\text{。}$$

因此，有
$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\int_L\frac{(\zeta-\alpha)^{1-m}(\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\text{。}$$

現在不難得到 $\varphi(t)$：

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-$$

$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}\int_L\frac{(\zeta-\alpha)^{1-m}(\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta。\quad(22)$$

這是特解，而通解可表作下形式：

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-$$

$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}\int_L\frac{(\zeta-\alpha)^{1-m}(\zeta-\beta)^m f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+$$

$$+\frac{c}{(t-\alpha)^{1-m}(t-\beta)^m}。\quad(23)$$

在(20)及(23)兩式中的常數 c 的值是相等的。

在特別情況，考慮第一種方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=f(t)。\quad(24)$$

此處 $a=0$, $b=1$。其次，

$$m=\frac{1}{2\pi i}\ln(-1)=\frac{1}{2},$$

這一回(20)式給出

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}}\int_L\sqrt{\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\alpha}}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+\frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}。\quad(25)$$

在(23)中令 $a=0$, 我們得到另一形式的解：

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\int_L\frac{\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+$$

$$+\frac{c}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}。\quad(26)$$

若 $\mathrm{Re}(m)=0$, 則由於(16)式及從積分 $\int_\alpha^\beta F_0(z)dz$ 的有限性，推知 α 及 β 皆是函數 $\Phi_0(z)$ 的正則點。於是由李烏維爾定理，則 $\Phi_0(z)=$常

數，且因 $\Phi_0(\infty)=0$，故 $\Phi_0(z)\equiv 0$。在這樣情况，方程（1）有唯一解，此解由(13)式決定之；當 $\mathrm{Re}(m)=0$ 時，(22)式不能表示方程的解。

§ 27. 非閉的且非單連通的境界的情况　現在設境界 L 由於 n 條簡單弧 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 所構成，此 n 條弧中任意兩條無公共點。下方程

$$a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=f(t) \tag{1}$$

可用 § 26 的相同方法解之，其中係數 a 及 b 皆爲常數。令

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

如前，我們得到

$$(a+b)F_i(t)-(a-b)F_e(t)=f(t)。\tag{2}$$

記弧 L_k 的起點及終點爲 α_k 及 β_k。設

$$F(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-\alpha_k}{z-\beta_k}\right)^m \Phi(z), \tag{3}$$

其中指數 m 也由 § 26 中（9）式確定。將這函數代入（2），我們得到：

$$\Phi_i(t)-\Phi_e(t)=\frac{1}{a+b}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-\beta_k}{t-\alpha_k}\right)^m f(t),$$

因而推得

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \tag{4}$$

且得到方程（1）的特解：

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2+b^2}f(t)-$$

$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k}\right)^m\int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k}\right)^m \frac{f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta。\tag{5}$$

如前節同樣討論，對於齊次方程的情况，我們得到對應函數 $\Phi_0(z)$，它等於

$$\Phi_0(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-\alpha_k},$$

或,將此分式通分,則簡化為

$$\Phi_0(z)=\frac{P_{n-1}(z)}{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)}, \tag{6}$$

其中 $P_{n-1}(z)$是 $(n-1)$ 次的任意多項式。現在不難得出下面齊次積分方程

$$a\varphi_0(t)+\frac{b}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=0$$

的解,等於

$$\varphi_0(t)=\frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^{n}[(t-\alpha_k)^{1-m}(t-\beta_k)^m]}, \tag{7}$$

其中 $Q_{n-1}(t)$是$(n-1)$次的任意多項式。方程(1)的通解為下形式

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-$$

$$-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k}\right)^m\int_L\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k}\right)^m f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-t}+$$

$$+\frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^{n}[(t-\alpha_k)^{1-m}(t-\beta_k)^m]}。 \tag{8}$$

多項式 $Q_{n-1}(t)$可這樣選擇,使 $\varphi(t)$在弧 L_1, L_2, $\cdots$, L_n 的 n 個端點處是有界的。

§28. 奇性積分方程組 有希爾伯脫核的積分方程組有下形式

$$L_k(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=\sum_{j=1}^{n}\left\{a_{kj}\varphi_j(s)+\frac{b_{kj}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_j(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}K_{kj}(s,\sigma)\varphi_j(\sigma)d\sigma\right\}=f_k(s),\ k=1,2,\cdots n, \tag{1}$$

其中 $K_{kj}(s,\sigma)$對於兩個變量都滿足李勃息茨條件。

很容易能夠將這些方程變爲弗列德和蒙型的。只須作下面一組變換

$$M_k(L_1, L_2, \cdots, L_n)=M_k(f_1, f_2, \cdots, f_n), \qquad (2)$$

其中

$$M_k(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)=\sum_{j=1}^{n}\left\{a_{kj}\omega_j(s)-\frac{b_{kj}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_j(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right\}。\qquad (3)$$

不難驗知方程組(2)有下形式

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{A_{km}\varphi_m(s)+\int_0^{2\pi}K^*_{km}(s,\sigma)\varphi_m(\sigma)d\sigma\right\}=M_k(f_1, f_2, \cdots, f_m), \qquad (4)$$

其中

$$A_{km}=\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}a_{jm}+b_{kj}b_{jm}), \qquad (5)$$

而 $K^*_{km}(s,\sigma)$是一個新核，也滿足李勃息茨條件。至於方程組(1)及方程組(4)是否等價的問題是相當困難的。關於方程組的解法，在勒・伊・穆斯黑里施維利的論文中[28 e]可以找到某些指示。

若方程組中所含的積分路線是閉境界，則上述理論沒有任何改變卽可應用到有柯西型的積分方程組。

下篇　積分方程的應用

第一章　狄銳希勒的問題及它的應用

因爲狄銳希勒的問題,有衆多的各式各樣的應用,它在數學中佔着特殊地位。流體力學中的基本問題,也就是流線問題,及彈性力學理論中的扭轉及彎曲問題皆可直接歸之於狄銳希勒問題。它也與平面以及空間的彈性力學理論中的靜力學問題緊密地聯繫着,而且也接觸到彈性波的傳播理論。類似情況,我們不難繼續列舉。

在這一章中,我們說明聯繫着積分方程理論的狄銳希勒問題的解法,並敍述它的某些應用。此處我們主要地將從事於平面問題的探討,它有豐富的應用,而且對於更高深的研究以及它的解法的有效性,對於我們都是非常有用的。

我們回憶狄銳希勒問題是由如下的情況所構成:求一函數,它在區域的內部是調和函數,而它在區域的境界上的值是已知的。

§29. 對於單連通區域的狄銳希勒問題　首先我們考慮有限區域的情況(圖 4)。用 D 表示這個區域,且用 L 表示它的境界。我們將認爲境界 L 是一條平滑且有連續曲率的曲線。以 $U(x, y)$ 記所求的調和函數,且以 $u(t)$ 表示它在 L 上的值,此處 t 是境界 L 上的點的複坐標。在單連通區域內的調和函數 $U(x, y)$ 可考慮是某一解析函數 $\varphi(z)$ 的實部分,這解析函數在所論的單連通區域內是正則的[1]。如果我們求出 $\varphi(z)$,則問題卽完全解決。我們將這個要求的函數寫作柯西型積

---

[1] 此處及以後我們採用下名詞。如果一個函數在一區域內的每一點是全純的,至多可能有限個點或曲線除外,則謂這個函數在區域內是解析的。若一解析函數是單值的且它在區域的內部沒有奇點,則謂這個函數在區域內是正則的。我們所用的名詞並不是通用的。

分的形式

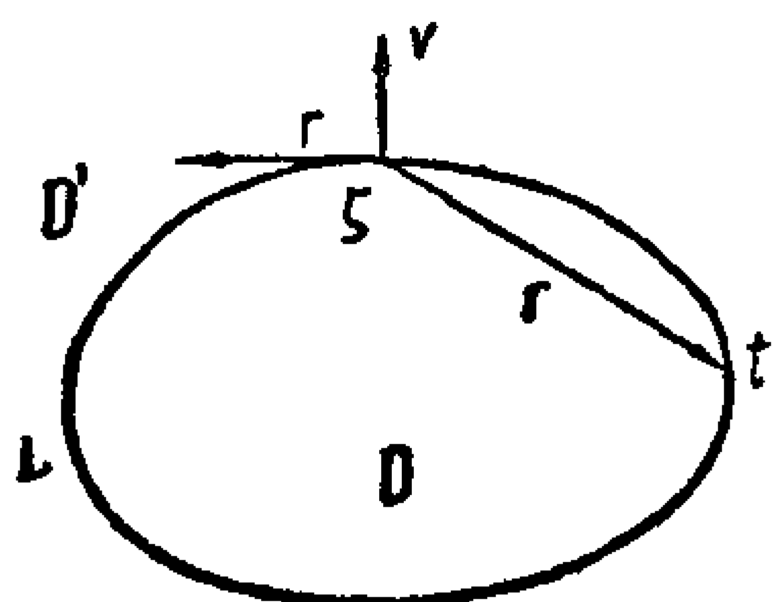


圖　4

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \qquad (1)$$

其中密度 $\mu(\zeta)$ 將認作是一個實函數。問題歸之於 $\mu(\zeta)$ 的決定。

迫使(1)式中的點 z 從區域的內部趨向於境界上的某一點 t。應用 § 22 中(2)式，我們得到：

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\mu(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta\,。 \qquad (2)$$

在(2)式中分離出實部分。注意 $\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}=u(t)$，我們求得：

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=2u(t),$$

因 $\mu(\zeta)$ 是實函數，或將上式寫作

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\,\mathrm{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-t}\right)=2u(t)。$$

計算積分的核。設 $\zeta-t=re^{i\theta}$。則

$$\mathrm{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-t}\right)=\mathrm{Im}[d\ln(\zeta-t)]=d\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}d\sigma,$$

其中 $d\sigma$ 是境界的弧素。由於柯西-黎曼方程，有

$$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma}=\frac{\partial\ln r}{\partial\nu}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\nu}\text{❶}。$$

選擇向徑 r 的正向是從 ζ 至 t。則我們不難見 $\frac{\partial r}{\partial\nu}=-\cos(\nu,r)$，因此，最後有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-t}\right)=-\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma\,。$$

若 $r\to0$ 則也有 $\cos(r,\nu)\to0$，且在有連續曲率的 L 的假設下，我們不難證明，核 $\frac{\cos(r,\nu)}{r}$ 是連續的。這樣一來，我們得到以 $\mu(t)$ 爲未知

❶ ν 是 L 的向外法線。

函數的弗列德和蒙型積分方程：

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_{L}\mu(\zeta)\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma=2u(t)。\qquad(3)$$

在特別情況，當境界 L 是一個橢圓，則這個方程在§§5及7中，我們已經研究過了。茲證明無論自由項是怎樣的函數，方程(3)是可解的，且有唯一解。換句話說，就是要證明 $\lambda=\frac{1}{\pi}$ 不是核 $\frac{\cos(\nu,r)}{r}$ 的特徵值。由於弗列德和蒙交比定理(§8)，只須證明對應的齊次方程僅有恆等於零的解就夠了。

令 $u(t)\equiv 0$。方程(3)成爲齊次的。設 $\mu_0(t)$ 是這個齊次方程的任一解，因之

$$\mu_0(t)-\frac{1}{\pi}\int_{L}\mu_0(\zeta)\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma=0。\qquad(4)$$

設(z 是 D 的內部中的任一點)

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。\qquad(5)$$

若 t 是 L 上的一點，則條件 $u(t)\equiv 0$ 顯示出 $\mathrm{Re}\{\varphi_0(t)\}=0$。由於狄銳希勒問題的唯一性定理，則在全部區域 D 內，有 $\mathrm{Re}\{\varphi_0(z)\}\equiv 0$。現在從柯西-黎曼方程，顯示出 $\varphi_0(z)$ 是一個純虛常數，$\varphi_0(z)=ia$。於是等式(5)可能使具有下形狀

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\mu_0(\zeta)-ia}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0,$$

而且這個恆等式對於 D 內的一切點 z 都是有效的。但從關於柯西積分的著名定理，$\mu_0(\zeta)-ia$ 是在 L 的外部爲正則且在無窮遠點等於零的某一函數 $\psi(z)$ 在 L 上的極限值。函數 $\psi(z)$ 的純虛部分在 L 上的值等於常數 a，則 $\psi(z)=$常數。然當 $z=\infty$ 時它等於零，故 $\psi(z)\equiv 0$。函數 $\mu_0(t)$ 是 $\mathrm{Re}\{\psi(z)\}$ 在境界上的值，因之 $\mu_0(t)\equiv 0$。我們的斷言已經證明。

既然 $\frac{1}{\pi}$ 不是方程(3)的特徵值,則對於這個方程我們可應用逐漸趨近法以解之,這一點在 §§ 5 及 7 中已經說明過了。

現在對於區域 D' 來解狄銳希勒問題,此處 D' 是關於 D 的外面部分的區域。這一回我們不能將所求函數寫作柯西型積分形式,因爲當 $z=\infty$ 時,這樣的積分等於零;在其時,所求函數 $\varphi(z)$ 在無窮遠點僅是有界的。因此我們用柯西型積分與某一個常數的和來表示所求函數 $\varphi(z)$,也就是設

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_L\mu(\zeta)d\sigma。\qquad(6)$$

密度 $\mu(\zeta)$ 認作是實函數。迫使 z 趨向於境界上的一點 t,從 § 22 中(3)式,我們得到:

$$\varphi(t)=-\frac{1}{2}\mu(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_L\mu(\zeta)d\sigma。$$

重複上面的討論,我們引出了積分方程

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)d\sigma=-2u(t)。\qquad(7)$$

我們證明方程(7)的可解性。如前,令 $u(t)\equiv0$,設 $\mu_0(t)$ 是齊次積分方程的任一解,也就是,設

$$\mu_0(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\mu_0(\zeta)\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_L\mu_0(\zeta)d\sigma=0,\qquad(8)$$

且設

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_L\mu_0(\zeta)d\sigma;\ z\in D'。\qquad(9)$$

方程(8)指出 $\mathrm{Re}\{\varphi_0(t)\}=0,\ t\in L$。如上所述,在其時,$\varphi_0(z)=ia$。將這個函數代入(9),且令 $z=\infty$,我們得到

$$ia=\frac{1}{2\pi}\int_L\mu_0(\zeta)d\sigma,$$

且因 $\mu_0(\zeta)$ 是實函數,則

$$a=0,\ \int_L \mu_0(\zeta)d\sigma=0。\tag{10}$$

現在顯然有
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0,\ z\in D'。$$

由於柯西型積分的著名性質，推知 $\mu_0(\zeta)$ 是在 D 內爲正則的某一函數 $\psi_1(z)$ 在 L 上的極限值。這時，$\mathrm{Im}(\psi_1(z))=0$，故 $\mu_0(\zeta)$ 是實數。從而知 $\psi_1(z)=C=$ 常數，因此得到 $\mu_0(\zeta)=C$。將這個值代入(10)，我們相信 $C=0$，最後有 $\mu_0(\zeta)=0$。

根據弗列德和蒙交比定理，現在我們可確定不論所設函數 $u(t)$ 如何方程(7)是可解的，且有唯一解。解這個方程，且將它的解代入(6)式，我們得到對於區域 D' 的狄銳希勒問題的解。

§30. 例 橢圓的內部變成圓的保角映射 如果一區域變成圓的保角映射是已知的，則可以簡單地得到狄銳希勒問題的解。反之，若對於某一單連通區域的狄銳希勒問題的解是已知的，則可能求一函數，這函數是這區域變成圓的保角映射。茲證明這個事實。

設 $w=\omega(z)$ 是實現區域 D 變成圓 $|w|<1$ 的保角映射的函數。其次，設區域 D 內的一點 $z=a$ 變爲圓心 $w=0$。則有

$$\omega(z)=(z-a)\psi(z),\tag{1}$$

其中 $\psi(z)$ 在 D 內是正則的且異於零。在這情況，函數

$$\varphi(z)=\ln\psi(z)$$

在 D 內也是正則的。我們將求確定函數 $\varphi(z)$ 的條件。

若 z 是境界上的一點 t，則

$$|w|=|t-a||\psi(t)|=1。$$

由此推得

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}=\ln|\psi(t)|=-\ln|t-a|。\tag{2}$$

這樣，爲了決定 $\varphi(t)$ 以解狄銳希勒問題，取 $u(t)=-\ln|t-a|$。求出 $\varphi(t)$ 後，我們已經不難還原到 $\omega(z)$。

作爲例子，我們求一函數，這是可實現一個橢圓

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$$

的內部變成圓 $|w|<1$ 的保角映射的函數。

這問題可藉於橢圓函數以解之。此處我們給出另一解法，這個解法是應用積分方程的方法。

由於需要，我們將橢圓中心變成圓心。對於函數 $\varphi(t)$，我們得到它在境界上的條件

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}=-\ln t。$$

設

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

我們導出積分方程[§ 5，公式(14)—(15)]

$$\mu(t)+\frac{b}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\mu(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{\zeta+t}{2}}=-2\ln t,\ \varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}。\quad (3)$$

求函數 $2\ln|t|$ 的富里耶級數，我們有：

$$2\ln|t|=\ln(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)。$$

不難驗證下面的恆等式

$$\ln(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=2\ln\frac{a+b}{2}+2\,\mathrm{Re}\ln\left(1+\frac{a-b}{a+b}\sigma^2\right),$$

其中 $\sigma=e^{i\theta}$。將上等式的右端中的對數展爲級數，且分解出它的實部分，我們得到所求的展開式：

$$\ln(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=$$

$$=2\ln\frac{a+b}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^k\cos 2k\theta。\quad (4)$$

由於 § 5，公式(22)，我們求得函數 $\mu(t)$ 的富里耶係數：

$$A_0=-\ln\frac{a+b}{2},\ A_{2k}=-\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}},$$

$$c^2=a^2-b^2。$$

其餘的係數皆等於零。現在,有

$$\mu(\zeta)=-\ln\frac{a+b}{2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\cos 2k\theta, \quad (5)$$

且有 $\varphi(z)=-\ln\frac{a+b}{2}-$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\theta}{\zeta-z}d\zeta, \quad (6)$$

而且 $\zeta=a\cos\theta+ib\sin\theta$。計算(6)式中的積分:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\theta\, d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2k\theta(-a\sin\theta+ib\cos\theta)d\theta}{a\cos\theta+ib\sin\theta-z}。$$

令 $e^{i\theta}=\sigma$, 上積分可寫作下形式

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{(\sigma^{2k}+\sigma^{-2k})[(a+b)\sigma^2-(a-b)]}{(a+b)\sigma^2-2\sigma z+(a-b)}\frac{d\sigma}{\sigma}=\frac{1}{2}(I_1+I_2),$$

用 I_1 及 I_2 記下積分

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\sigma^{2k-1}[(a+b)\sigma^2-(a-b)]}{(a+b)\sigma^2-2\sigma z+(a-b)}d\sigma,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{\sigma^{-2k-1}[(a+b)\sigma^2-(a-b)]}{(a+b)\sigma^2-2\sigma z+(a-b)}d\sigma。$$

在 I_1 中的被積函數有兩個一級極點:

$$\sigma_1=\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b},\quad \sigma_2=\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}。$$

這兩個極點的對應殘數分別等於

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right)^{2k},\quad \left(\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right)^{2k}。\quad (7)$$

我們將證明這兩個極點 σ_1 及 σ_2 皆在圓 $|\sigma|<1$ 之內。

乘積 $\sigma_1\sigma_2$ 等於 $\frac{a-b}{a+b}$, 因之小於1。故 σ_1 及 σ_2 的兩個模中必須有一個小於1。如果第二個數的模大於1, 則積分 I_1 等於(7)中一個

殘數且它在橢圓的內部不是正則的，這顯然是不可能的❶。從上面的證明,則有

$$I_1=\frac{(z+\sqrt{z^2-c^2})^{2k}+(z-\sqrt{z^2-c^2})^{2k}}{(a+b)^{2k}}。$$

對於 I_2 的計算，令 $\sigma=\frac{1}{\tau}$。則

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^{2k-1}[a+b-(a-b)\tau^2]}{(a-b)\tau^2-2z\tau+(a+b)}d\tau。$$

如上面相似的討論,我們知被積函數的兩個極點皆在單位圓的內部,且因之有 $I_2=0$。於是我們得到

$$\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\cos 2k\theta}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2}\frac{(z+\sqrt{z^2-c^2})^{2k}+(z-\sqrt{z^2-c^2})^{2k}}{(a+b)^{2k}}。\quad(8)$$

右端的分子顯然是 $2k$ 次的多項式。我們簡用 $F_{2k}(z)$ 記這個分

---

❶ 我們引用直接的證明來證實這個斷語。記

$$\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{c}=\chi,\qquad(甲)$$

從而有 $z=\frac{c}{2}\left(\chi=\frac{1}{\chi}\right)$。這個變換是使沿着閉區間 $(-c, c)$ 所割裂的 z 平面變爲圓 $|\chi|=1$ 的內部或它的外部，視根號前的符號的選擇而決定。例如，設在根號前取符號，我們得到 $|\chi|<1$。。於是尤其是

$$\left|\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right|<1。$$

現在考慮圓 $|\chi|=\frac{a+b}{c}$。若製作下變換

$$\chi=\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c},$$

則這個圓變爲我們所設備的橢圓

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta。$$

這時，橢圓的內部的點對應於平面 χ 上滿足不等式 $1\leqslant\chi<\frac{a+b}{c}$ 的點。於是，在橢圓的內部,有

$$\left|\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right|<\frac{a+b}{c},$$

或

$$\left|\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{a+b}\right|<1。$$

子。則

$$\varphi(z)=-\ln\frac{a+b}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}F_{2k}(z),\quad(9)$$

而所求的變換函數等於

$$\omega(z)=\frac{2z}{a+b}e^{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}F_{2k}(z)}。\quad(10)$$

§31. **對於複連通區域的狄銳希勒問題** 設 D 是$(n+1)$-連通有限區域。它的境界 L 由於 $n+1$ 個閉曲線所構成,我們用 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 表示這 $n+1$ 個閉曲線,且 L_0 是限制區域 D 的一個最外面的曲線(圖 5)。

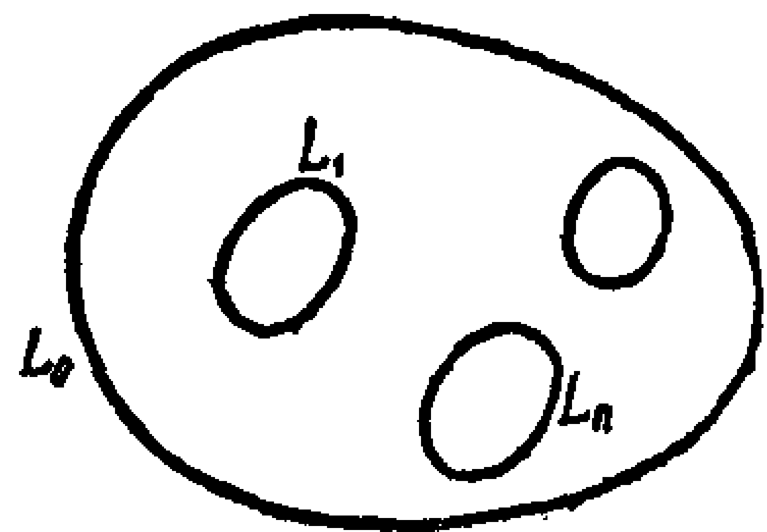


圖 5

在着手解决我們的問題之前,應有下面的注意。如果函數 $U(x, y)$ 在複連通區域內是單值的且調和的,一般地說,它的共軛函數 $V(x, y)$ 是多值性的。我們闡明它的多值性。設 ν 是 L 的向外法線。記

$$A_k=-\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\partial U}{\partial\nu}d\sigma,\quad k=1, 2, \cdots, n。\quad(1)$$

由於柯西-黎曼方程 $\frac{\partial U}{\partial\nu}=\frac{\partial V}{\partial\sigma}$, 有

$$-\int_{L_k}\frac{\partial V}{\partial\sigma}d\sigma=2\pi A_k。$$

但最後式中的積分等於當逆時針方向沿着 L_k 繞一週後 $V(x, y)$ 的增量。這樣一來,若調和函數在 D 內是單值的,則當沿着 L_k 繞一週後,$k=1, 2, \cdots, n$, 它的共軛函數得到常數增量 $2\pi A_k$。當繞同樣的一週後,解析函數 $\varphi(z)=U(x, y)+iV(x, y)$ 得到增量 $2\pi iA_k$。函數 $A_k\ln(z-z_k)$ 也得到相同增量,其中 z_k 是區域 D 內的任意一點。由此推知 $\varphi(z)$ 可能表如下形式

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n}A_k\ln(z-z_k)+\varphi^*(z),\quad(2)$$

其中 $\varphi^*(z)$ 是在 D 內的單值函數，且是正則的。

狄銳希勒問題可用下述方法以解之。設 $u(t)$ 是 $U(x, y)$ 在 L 上的值，且它是已知的。從(2)式，推得

$$\operatorname{Re}\{\varphi^*(t)\}=u(t)-\sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t-z_k|。\tag{3}$$

單值函數 $\varphi^*(z)$ 可表作柯西型積分：

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{4}$$

以求之，而設密度 $\mu(\zeta)$ 是實函數。重複前節的討論，我們導出下面的積分方程

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}d\sigma=2u(t)-2\sum_{k=1}^{n}A_k \ln|t-z_k|。\tag{5}$$

可能證明 $\frac{1}{\pi}$ 是核 $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ 的特徵值，且它與 n 個線性無關的特徵函數對應的。至於係數 A_k 是由於（5）的右端要和它的共軛方程的特徵函數是正交的這個條件來決定。解(5)，由(4)式及(2)式我們求得狄銳希勒問題的解。

上述方法在實用上不大適宜的，因爲這個方法需要計算共軛方程的特徵函數。因此我們將給出另一個方法，在這方法中克服了所指出的缺點。

用 $a(t, \zeta)$ 記一個函數，當 t 及 ζ 兩點皆在同一個曲線 L_k 的內部時，它等於1；在其他任何情況它等於零。以下面的方程：

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L\left\{\frac{\cos(\nu, r)}{r}+a(t, \zeta)\right\}\mu(\zeta)d\sigma=$$

$$=2u(t)-2\sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t-z_k| \tag{6}$$

來代替方程(5)。

將這個方程更詳細地寫作這樣形式：若 t 在 L_k 的上面，$k=1, 2, \cdots, n$，則

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu(\zeta)d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_{L_k}\mu(\zeta)d\sigma=$$

$$=2u(t)-2\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|t-z_k|, \tag{7_1}$$

但若 t 在 L_0 的上面,則

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu(\zeta)d\sigma=2u(t)-2\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|t-z_k|。 \tag{7_2}$$

我們證明無論右端如何方程(6)有唯一解。爲了這個斷語的成立,只須證明齊次方程

$$\mu_0(t)-\frac{1}{\pi}\int_L\left\{\frac{\cos(\nu,r)}{r}+a(t,\zeta)\right\}\mu_0(\zeta)d\sigma=0 \tag{7}$$

僅有零解 $\mu_0(t)\equiv 0$ 就夠了。

設 $\mu_0(t)$ 是方程(7)的任一解。在方程(7)中,把核是 $a(t,\zeta)$的積分移至右端。則這個方程具有下形式:

$$\mu_0(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu_0(\zeta)d\sigma=\frac{1}{\pi}\int_{L_k}\mu_0(\zeta)d\sigma,\ t\in L_k,\ k>0,$$

$$\mu_0(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu_0(\zeta)d\sigma=0,\quad t\in L_0。$$

引用下記號

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\mu_0(\zeta)d\sigma=b_k,\ k=1,2,\cdots,n;$$

且令 $b_0=0$。$\mu_0(t)$ 所滿足的方程可能表如下形式:

$$\mu_0(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu_0(\zeta)d\sigma=2b_k, \tag{8}$$

$$t\in L_k,\ k=0,1,2,\cdots,n。$$

我們考慮柯西型積分:

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\ z\in D。$$

應用方程(8)且重複 § 29 的討論,我們得到 $\varphi_0(z)$ 在曲線 L_k 上應滿足

的關係

$$\mathrm{Re}\{\varphi_0(\zeta)\}=b_k,\ \zeta\in L_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

因 b_k 是常數，由於柯西-黎曼方程，則有

$$\frac{\partial\,\mathrm{Im}\{\varphi_0(\zeta)\}}{\partial\nu}=-\frac{\partial\,\mathrm{Re}\{\varphi_0(\zeta)\}}{\partial\sigma}=0,\ \ \zeta\in L。$$

函數 $\varphi_0(z)$ 在 D 內是正則的，它的純虛部分在 D 內是調和函數。既然它的純虛部分在 L 上的法線微商等於零，由於牛曼問題的解的唯一性定理，$\varphi_0(z)\equiv$ 常數。因這個函數在 L_0 上變爲零，在這時有 $\mathrm{Re}\{\varphi_0(z)\}\equiv0$。這樣一來，$b_k=0$，且 $\varphi_0(z)=ia$，此處 a 是一個實常數。這樣就給出下式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\zeta)-ia}{\zeta-z}d\zeta\equiv0,\ \ z\in D。$$

由此推得，在每一曲線 L_k 上 $\mu_0(\zeta)-ia$ 是某一函數的極限值；這個函數在無窮遠點等於零，而在與 D 無公共點且以曲線 L_k 爲境界的任何區域內是正則的。這個函數的純虛部分是一個常數，等於 a；但它的實部分也是常數：

$$\mu_0(\zeta)=c_k=\text{常數},\ \ \zeta\in L_k。$$

因當 $z=\infty$ 時，$\mu_0(\zeta)-ia$ 變爲零，在其時有 $c_0=0$。其次，

$$0=b_k=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\mu_0(\zeta)f\sigma=\frac{c_k}{2\pi}\int_{L_k}d\sigma。$$

從而有 $c_k=0$，因之 $\mu_0(\zeta)\equiv0$。現在從弗列德和蒙交比定理，推知無論方程(6)的右端如何它有解，且此解是唯一的。解方程(6)，然後我們從下條件

$$\int_{L_k}\mu(\zeta)d\sigma=0,\ \ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n❶,$$

以求得係數 A_k。於是方程(6)與方程(5)是相同的，且由於(4)式及

❶ 等式 $\int_{L_k}\mu(\zeta)d\sigma=0$ 本身表示關於 A_k 的非齊次的代數線性方程組。它常有解，因如果不是這樣，我們很容易確信齊次狄銳希勒問題有不恆等於零的解。

(2)式,我們得到問題的解。

轉向無界區域的情況。設區域 D 是 n 個閉曲線 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的外面部分所構成(圖 6)。公式(2)保持有效,但還一回僅須係數 A_k 適合下等式

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=0。\qquad (9)$$

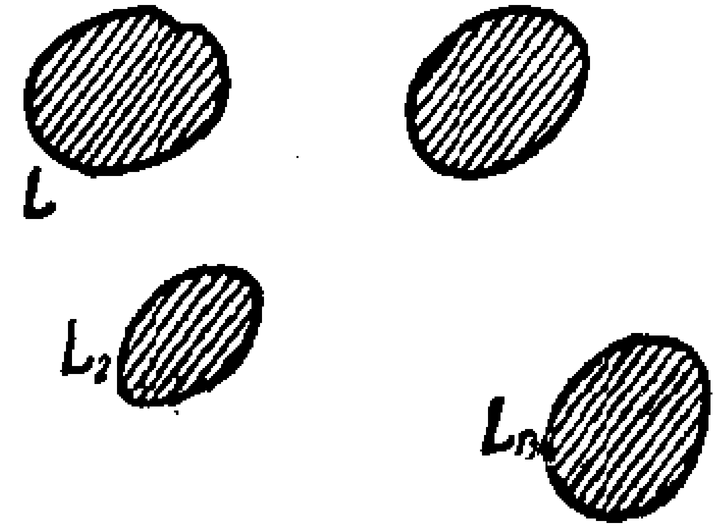


圖 6

如果方程(9)不成立,則調和函數$\mathrm{Re}\{\varphi(z)\}$,如同 $\ln|z|\sum_{k=1}^{n}A_k$ 一樣,可增至無窮大;這樣違背了調和函數的定義。如同 § 29, $\varphi^*(z)$ 不能表達爲柯西型積分,而設爲

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_L\mu(\zeta)d\sigma。\qquad (10)$$

這樣我們引出了方程

$$\mu(\zeta)+\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)d\sigma=$$

$$=-2u(t)+2\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|t-z_k|。\qquad (11)$$

這個方程有 $n-1$ 個特徵函數。方程 (11) 的右端和它的共軛方程的特徵函數爲正交的條件與(9)式一起給出 n 個方程的方程組。從這個方程組來決定係數 A_k。

爲了無須計算共軛核的特徵函數,我們用對於有限區域的情況同樣對待。用 $b(t,\zeta)$ 記一個函數,若 t 及 ζ 屬於同一L_k, $k=1,2,\cdots,n-1$ 則 $b(t,\zeta)$ 等於 1; 而在其他任何情況它等於零。我們用下方程:

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)\left[\frac{\cos(\nu, r)}{r}+b(t, \zeta)\right]d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)d\sigma=$$

$$=-2u(t)+2\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|t-z_k|\qquad (12)$$

以代替方程 (11),或更適當的形式: 若 t 在 L_k 上, $k=1, 2, \cdots, n-1$, 則

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma+\frac{1}{\pi}\int_{L_k}\mu(\zeta)d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)d\sigma=$$

$$=-2\mu(t)+2\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|t-z_k|, \qquad (13_1)$$

但若 t 在 L_n 上,則

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)d\sigma=$$

$$=-2\mu(t)+2\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|t-z_k|。 \qquad (13_2)$$

如前所述,我們也可能證明無論 (12) 式的右端如何它有解。解這個方程,但需要服從下面的條件

$$\int_{L_k}\mu(\zeta)d\sigma=0,\ k=1,2,\cdots,n-1。 \qquad (14)$$

方程(9)及方程(14)構成 n 個方程的線性方程組,由這個方程組我們求得係數 A_k。若條件 (14) 滿足,則方程 (11) 及方程 (12) 是相同的。這樣求得的函數 $\mu(\zeta)$ 引導出狄銳希勒問題的解。

§ 32. 變態的狄銳希勒問題及牛曼問題 我們把下面的問題叫做變態的狄銳希勒問題:求在複連通區域內爲正則的解析函數,而設它的實部分在構成這個域區的境界的每一曲線上除差一常數外是已知的。

因此所需求的函數 $\varphi(z)$ 在境界上必須滿足這樣的條件:若 t 在曲線 L_k 上,則

$$\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}=f(t)+b_k, \qquad (1)$$

其中 $f(t)$ 是已知函數,而 b_k 是沒有決定的常數。這些常數 b_k 必須從 $\varphi(z)$ 在區域內是單值的這個條件決定之。在諸常數 b_k 中可能隨意固定一個,於是其餘的常數是唯一決定的。爲了證明這個事實,設它的反面成立。固定一個 b_k, 例如 b_0, 且設 $\varphi_1(z)$ 及 $\varphi_2(z)$ 是在區域 D 內爲正則的兩個函數,且滿足下方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{\varphi_1(t)\}=f(t)+b_k',\\&\mathrm{Re}\{\varphi_2(t)\}=f(t)+b_k'',\end{aligned}\quad b_0'=b_0'',\ t\in L_k\text{。}$$

於是差 $\omega(z)=\varphi_1(z)-\varphi_2(z)$ 在 D 內也是正則的，且它的實部分在每一曲線 L_k 上等於常數 $b_k'-b_k''$。在這情況，有

$$\frac{\partial\,\mathrm{Im}(\omega(t))}{\partial\nu}=-\frac{\partial\,\mathrm{Re}(\omega(t))}{\partial\sigma}=0\text{。}$$

因 $\omega(z)$ 在 D 內是正則的，則 $\mathrm{Im}(\omega(z))$是在 D 內的調和函數。由於牛曼問題的唯一性定理，$\mathrm{Im}(\omega(z))=$常數。於是從柯西-黎曼方程，推知 $\mathrm{Re}(\omega(z))=$常數。但在 L_0 上，有 $\mathrm{Re}(\omega)=0$，因爲 $b_0'=b_0''$。從而有 $\mathrm{Re}(\omega(z))\equiv 0$，因之 $b_k'=b_k''$。根據以上所論，附帶地說明了一件事實，就是變態的狄銳希勒問題的解除差一個純虛常數外是唯一決定的。

前節的結果可能簡單地用來解變態的狄銳希勒問題。在有限區域的情況（圖 5），我們寫出積分方程

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L\left(\frac{\cos(\nu,r)}{r}+a(t,\zeta)\right)\mu(\zeta)d\sigma=2f(t)\text{。}\qquad(2)$$

按照前節所述，這個方程有解，且它的解是唯一的。解這個方程。現在記

$$b_0=0,\ b_k=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\mu(\zeta)d\sigma,\ k=1,2,\cdots,n\text{。}\qquad(3)$$

於是若 t 在 L_k 上，有

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\cos(\nu,r)}{r}\mu(\zeta)d\sigma=2[f(t)+b_k]\text{。}\qquad(4)$$

現在設

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\text{。}\qquad(5)$$

(4)式內的左端等於 $2\mathrm{Re}\{\varphi(t)\}$（參閱 § 29），且從(4)式推知在 D 內爲正則的單值函數 $\varphi(z)$ 滿足方程(1)，因之 $\varphi(z)$ 本身表現是變態的狄銳希勒問題的解。

在無限區域的情況，如果解出積分方程

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\left(\frac{\cos(\nu, r)}{r}+b(t, \zeta)\right)\mu(\zeta)d\sigma-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)d\sigma=-2f(t), \qquad (6)$$

則我們得到這樣情況的變態的狄銳希勒問題的解。

此處我們設

$$b_k=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k} \mu(\zeta)\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int_L \mu(\zeta)d\sigma, \qquad (7)$$

於是積分(5)給出變態的狄銳希勒問題對於無限區域的解。

下列一連串問題可歸結到變態的狄銳希勒問題：複連通區域的保角映射問題，空心桿的扭轉問題，流線問題以及其他許多問題。所謂牛曼問題也可歸結到這個同一問題。

牛曼問題的構成是由下面的方式：求在一區域內的調和函數，如果這個函數在境界上的法線微商是已知的。

牛曼問題有解的必要且充分的條件是

$$\int_L F(\zeta)d\sigma=0,$$

其中 $F(\zeta)$ 是需要求的函數的已知法線微商。在數學物理教程中已導得這個良好而著名命題的證明。

設 $U(x,y)$ 是需要求的函數，且 $F(\zeta)$ 是這個函數在境界上的已知法線微商。其次，設 $V(x,y)$ 是 $U(x,y)$ 的共軛函數，且 $\varphi(z)=U+iV$。

如同前節所指出的，

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n} A_k\ln(z-z_k)+\varphi^*(z), \qquad (8)$$

其中 $\varphi^*(z)$ 是單值函數。這一回係數 A_k 是已知的：

$$A_k=-\frac{1}{2\pi}\int_{L_k} F(t)d\sigma$$

於是問題僅歸結到單值函數 $\varphi^*(z)$ 的尋求。

不難找出對於 $\varphi^*(z)$ 的邊界條件。設

$$\varphi^*(z)=U^*+iV^*\text{。}$$

我們已知函數 U^* 在境界 L 上的法線微商:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu}=F(t)-\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{\partial \ln|t-z_k|}{\partial \nu}=F^*(t)\text{。} \tag{9}$$

在曲線 L_k 上我們選取任意一點 t_k。於是在這曲線上有

$$V^*=\int_{t_k}^{t}F^*(\zeta)d\sigma+b_k, \tag{10}$$

其中 b_k 暫設是未定常數。函數 $i\varphi^*(z)=V^*-iU^*$ 是以(10)爲境界條件的變態的狄銳希勒問題的解。解這個問題，按照前面的證明我們獲得牛曼問題的解。

§ 33. **實體桿與空心桿的扭轉** 在桿的扭轉的理論中，只須採取應力的分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 異於零[1]。它們適合下方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0\text{。} \tag{1}$$

用 u_x, u_y, u_z 記作對於 x 軸，y 軸及 z 軸的彈性位移的分量。從霍克斯法則，可能引出下式

$$u_x=-\theta yz+\alpha,\ u_y=\theta xz+\beta,\ \frac{\partial u_z}{\partial z}=0\text{。} \tag{2}$$

此處 θ, α 及 β 皆是常數。θ 的值是與桿的扭轉成正比。其次，再從霍克斯法則，我們得到:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}-\theta y\right),\\ \tau_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\theta x\right)\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

第一個方程對於 y 求微商，第二個方程對於 x 求微商，然後相減，我們

[1] 我們認爲 z 軸的方向與桿的母線平行。

得到：

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}=-2\mu\theta。 \tag{4}$$

設

$$\tau_{xz}=-\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\theta y\right),\quad \tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\theta x\right), \tag{5}$$

這樣的 τ_{xz} 及 τ_{yz} 可滿足方程（1）。將它們代入方程（4），我們求得 $\Delta\varphi=0$。因之 $\varphi(x, y)$ 是在區域 D 內的一個調和函數，此區域 D 是桿與平面 (x, y) 的相交部分所構成。

我們求函數 φ 的邊界條件。在側面上，因而在區域 D 的境界上，有下面的等式

$$\tau_{xz}\cos(\nu, x)+\tau_{yz}\cos(\nu, y)=0, \tag{6}$$

其中 ν 是曲面的向外法線。等式（6）表示桿的側面不受外力的影響。將表達式（5）代入上式，我們將它引到下形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(\nu, y)-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(\nu, x)=-\theta[x\cos(\nu, y)-y\cos(\nu, x)]。$$

再者

$$\cos(\nu, x)=-\cos(\sigma, y)=-\frac{dy}{d\sigma},\quad \cos(\nu, y)=\cos(\sigma, x)=\frac{dx}{d\sigma},$$

由此推得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}=-\frac{1}{2}\theta\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial \sigma}。$$

對 σ 取積分，最後得到：在區域 D 的境界 L 上，

$$\varphi=-\frac{1}{2}\theta(x^2+y^2)+c,\quad c=\text{常數}。 \tag{7}$$

若桿是實體的，則區域 D 是單連通的。常數 c 可隨意地規定，而函數 $\varphi(x, y)$ 是有邊界條件（7）的狄銳希勒問題的解。若桿是空心的，則區域 D 是複連通的，且常數 c 在構成此區域的境界的不同曲線上可有不同的值。

現在證明在空心桿的情況，$\varphi(x, y)$ 的共軛函數 $\psi(x, y)$ 在 D 內是單值的。由於柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}。$$

將 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ 代入方程(5)，得到：

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\mu\theta y, \quad \tau_{yz}=\frac{\partial\psi}{\partial y}+\mu\theta x。$$

將這式與(3)式比較，我們看到 $\psi=\mu u_z+A$，其中 A 是常數。但 u_z 是桿上的點的位移，必須是單值的。由此推知 $\psi(x, y)$ 也是單值的。

現在 $\varphi(x, y)$ 顯然是有邊界條件(7)的變態的狄鋭希勒問題的解。

應注意的，較方便一些的不是 $\varphi(x, y)$ 的確定而是確定函數 $U(x, y)=-\frac{2}{\theta}\varphi(x, y)$，這個函數是由於邊界條件

$$U+x^2+y^2+c' \tag{8}$$

所確定的。

§34. 正方形截面的桿的扭轉 我們考慮桿的扭轉問題，這個桿在與母線平行的平面上的截面是一個正方形。坐標軸的安置如圖7所指示的。為了計算簡單，我們取正方形的邊長等於2。設§33中(8)式內的常數 c' 等於零。函數 $U(x, y)$ 滿足邊界條件

$$U(x, y)=x^2+y^2。$$

按常例，設 $U(x, y)=\mathrm{Re}\{\Phi(z)\}$，且

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

我們得到積分方程

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)\frac{\cos(\nu, r)}{r}d\sigma=2(x^2+y^2), \tag{1}$$

其中 $t=x+iy$ 是正方形周界上的點。

在周界的四個角點處，核 $\frac{\cos(\nu, r)}{r}$ 變為無窮大，因此方程(1)不

是弗列德和蒙型的。然而可證明(參閱[32])弗列德和蒙交比定理此處仍然有效。對應的齊次方程僅有零解。由此顯示出方程(1)的可解性。

將方程表作另一個形式,對於數值計算更方便些,也就是(§ 29)

$$-\frac{\cos(\nu, r)}{r}d\sigma = d\theta, \tag{2}$$

其中 θ 是 ζ 至 t 的向量與 x 軸的交角,而方程(1)採取下形式

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)d\sigma = 2(x^2+y^2)。 \tag{3}$$

方程(3)將由 § 7 的方法解之,應用矩形公式以計算積分。

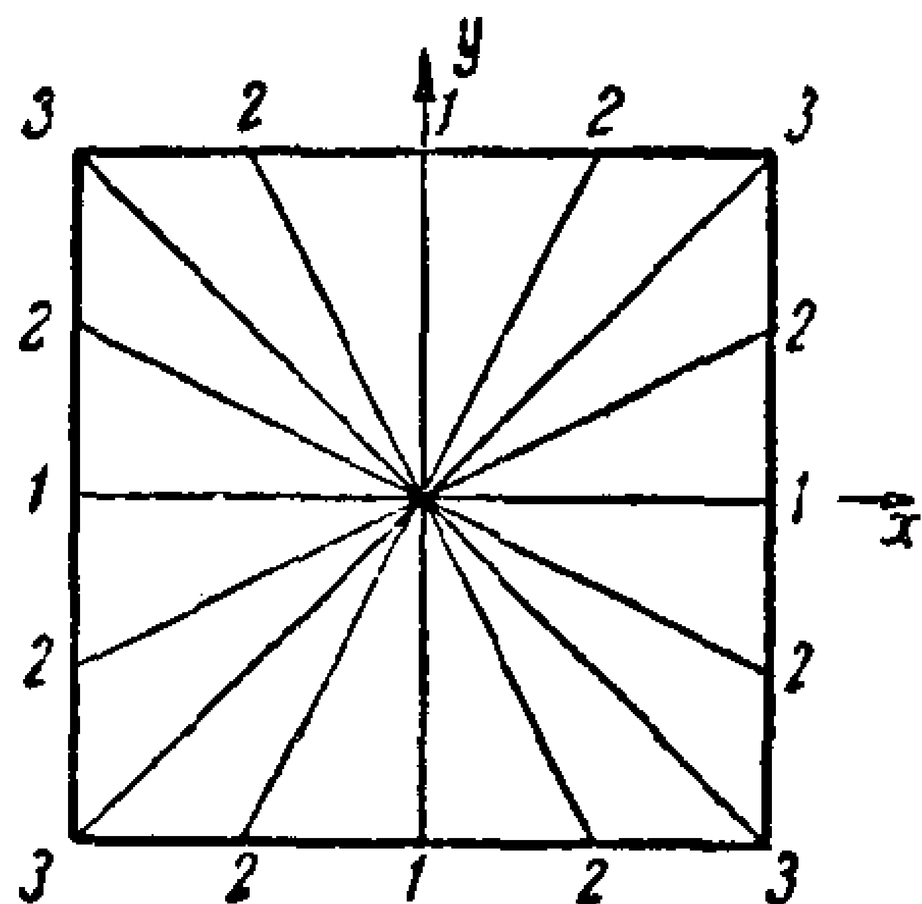


圖 7

我們在正方形的周界上選取 16 個點,在圖 7 中記以數字 1, 2, 3。這些點中的坐標之一等於 ± 1,而另一坐標必等於數值 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 中之一。應注意的,由於邊界條件的對稱形式,則 $\mu(t)$ 在關於 x 軸及 y 軸對稱的點的值或在關於坐標角分角線對稱的點的值是彼此相等的[1]。這樣一來,在記以相同數字的點處,$\mu(t)$ 的值是相等的。

[1] 我們引出這個命題的證明。函數 $U(y, x)$ 是調和的,且滿足 § 33 中同一邊界條件(8),如同函數 $U(x, y)$ 一樣的。但其時 $U(y, x) = U(x, y)$。其次,

$$U(y, x) = \mathrm{Re}\{\Phi(y+ix)\} = \mathrm{Re}\{\Phi(i\bar{z})\} = \mathrm{Re}\{\overline{\Phi(i\bar{z})}\}。$$

由此推出,$\Phi(z) = \overline{\Phi(i\bar{z})}$,或

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\bar{\zeta}+i z}d\bar{\zeta}。$$

在第二積分中用 $i\bar{\zeta}'$ 以替代 ζ。在 ζ 平面內我們得到同一境界 L,但所沿的方向是相反的。改變所沿的方向及積分符號,我們得到(在 ζ' 記號上去掉撇號):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(i\bar{\zeta})}{\zeta - z}d\zeta。$$

但解析函數用具有實密度的柯西型積分的形式的表達式是唯一的。由此推知 $\mu(\zeta) = \mu(i\bar{\zeta})$,也就是函數 $\mu(\zeta)$ 在關於第一象限角的分角線對稱的點處取同一值。在其他情況的 $\mu(\zeta)$ 的對稱性有與上相似的證明。

因此 $\mu(t)$ 僅在 $t_1=1$, $t_2=1+\frac{1}{2}i$, $t_3=1+i$ 三個點處有不同的值。記

$$\mu(1)=\mu_1,\ \mu\left(1+\frac{1}{2}i\right)=\mu_2,\ \mu(1+i)=\mu_3。\qquad (4)$$

用矩形公式以替代(3)式中的積分,得到:

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{16}\mu(t_k)\Delta\theta_k(t)=2|t|^2。\qquad (5)$$

此處用 t_k 表示我們所選擇的諸點,而用 $\Delta\theta_k(t)$ 表示 t_k 及 t_{k+1} 兩點與點 t 相連的兩線段間的夾角。在(5)中,令 $t=t_1$, t_2, t_3, 我們得到有三個未知數 μ_1, μ_2, μ_3 的方程組:

$$\left.\begin{aligned}1.2432\,\mu_1+0.5000\,\mu_2+0.2658\,\mu_3=2.000,\\0.1992\,\mu_1+1.4273\,\mu_2+0.3734\,\mu_3=2.500,\\0.1296\,\mu_1+0.2508\,\mu_2+1.1239\,\mu_3=4.000。\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

$\Delta\theta_k(t_i)$ 的值可很簡單地由圖形決定之;組成(6)式中各方程是由於在圖中有同一數字的點處 $\mu(t)$ 有同一值。

解方程組(6),我們得到:

$$\mu_1=0.60,\ \mu_2=0.80,\ \mu_3=3.32。\qquad (7)$$

在正方形的每一邊上對於函數 μ 用插入法。由於 μ 的對稱性,在平行於 x 軸的邊上它的插入多項式的形式可能是 ax^4+bx^2+c 。而在其他的兩邊上,我們顯然得到係數相同的插入多項式 ay^4+by^2+c。計算係數,我們求得: $a=2.56, b=0.16, c=0.60$, 因之有

$$\left.\begin{aligned}\mu(x+i)=2.56x^4+0.16x^2+0.60,\\\mu(\pm1+iy)=2.56y^4+0.16y^2+0.60。\end{aligned}\right\}\qquad (8)$$

既知 $\mu(t)$, 不難計算 $\Phi(z)$, 因而可求得應力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz}。

§35. 流線問題 平面的流線問題是決定在平行平面上流動的速度場,在這流動的行程中遇有一個或多個,固定的或以已知方式運動着的剛體。在無窮遠處的流動速度是設爲已知的。

若我們從事於理想的不可壓縮的液體的流動勢的考究,則問題就

歸結到按已給出的邊界條件的一個複勢函數

$$w(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y) \tag{1}$$

的確定，其中 φ 是速度勢，ψ 是流動函數。使 x 軸與無窮遠處的速度平行；用符號 U 表示這速度的數值。則邊界條件取得下面的式樣：

(a)在無窮遠處

$$\lim_{z\to\infty}[\varphi(x, y)-Ux]=C, \tag{2}$$

(б)在流線型物體的邊界上

$$\psi=U_0y-V_0x-\frac{\Omega}{2}(x^2+y^2)+C', \tag{3}$$

其中 U_0 及 V_0 是流線型物體的前進運動的速度分別在 x 軸與 y 軸上投影，Ω 是它的轉動的角速度。C 與 C' 的數值是恆定不變的。若有多個流線型物體，則在每個邊界上常數 C' 取其不同的數值

如公式(3)所明示，流動函數 $\psi(x, y)$ 是單值的；關於速度勢 $\varphi(x, y)$ 的，則若流動所佔據的區域是單連通的，換言之，若流動僅流過一個物體，它將是單值的。在流過多個物體的情況中，一般地說，這速度勢將是多值的。

$$\Gamma_L=\int_L u_x dx+u_y dy=\int_L d\varphi \tag{4}$$

的數值叫線境界 L 的環流❶，式中 u_x 及 u_y 是流動速度的分速度。若線邊界 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的環流等於 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ 則

$$w=Uz+\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k}{2\pi i}\cdot\ln(z-z_k)+w^*(z), \tag{5}$$

其中 $w^*(z)$ 在流動函數的區域中是正則的和單值的。在流線型物體的邊界上 $w^*(z)$ 滿足如下的條件：

❶ 參看，例如，Н. Е. Кочин, И. А. Кибель 及 Н. В. Розе, 理論流體力學(Гостехиздат, 1948)的第二部分，或 Л. И. Седов, 複變數函數理論在某些平面的流體動力學問題上的應用, 數學科學成就，第 VI 期，1939 。

$$\text{在 } L_k \text{ 上}\qquad \left.\begin{aligned}\operatorname{Im}\{w^*(z)\}=(U_{0k}-U)y-\\ -V_{0k}x-\frac{\Omega_k}{2}(x^2+y^2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k}{2\pi}\ln|z-z_k|+C_k\text{。}\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

在公式(5)及(6)中 z_k 代表 L_k 裏面任意固定的一點。U_{0k}, V_{0k}, Ω_k 及 C_k 代表屬於境界 L_k 的 U_0, V_0, Ω, C 的數值。現在可能的是作為具有邊界條件(6)的變態的狄銳希勒問題的解以求得函數 $\frac{1}{i}w^*(z)$。例如,依照 § 32 的方法,解此問題,便已求得流動中的速度場。

§ 36. 經兩橢圓柱體的流動　當作一個例子來看,試考關於流動經過位置如圖 8 所示的半軸長為 a 及 b 的兩相同橢圓柱的問題。為計算的簡便起見設流動是不含有環流的,且橢圓柱是固定不動的。又設在無窮遠處的流動速度等於 U,且其方向是依照 x 軸的。§ 35 的公式(5)取得如下式樣:

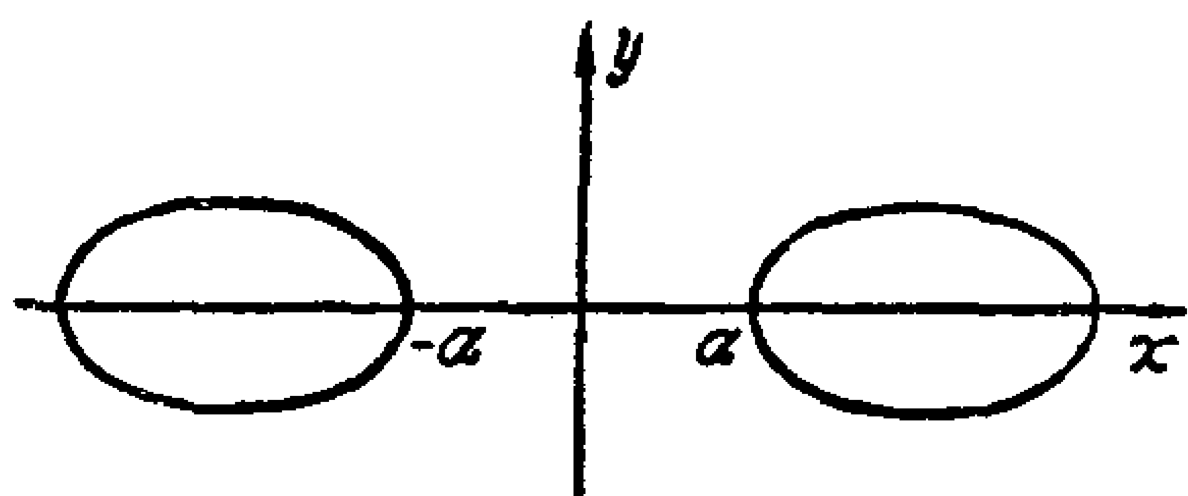


圖 8

$$w(z)=Uz+w^*(z)\text{。}\qquad(1)$$

函數 $\omega(z)=\frac{1}{i}w^*(z)$ 的邊界條件將是:

$$\text{在 } L_k \text{ 上}\qquad \operatorname{Re}\{\omega(z)\}=-Uy-C_k,\ k=1,2\text{。}\qquad(2)$$

設

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\text{。}\qquad(3)$$

依照 § 32, 我們得到下面一個 $\mu(\zeta)$ 的積分方程:

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\zeta)\left(\frac{\cos(\nu,r)}{r}+b(t,\zeta)\right)d\sigma=2Uy,\qquad(4)$$

在這裏我們給 $b(t,\zeta)$ 的定義是:

$$b(t,\zeta)d\sigma=\frac{1}{2}d\tau,\qquad(5_1)$$

其中 τ 是確定橢圓點的位置的參數,若 t 及 ζ 是在同一橢圓上;若 t 及

ζ 不在同一橢圓上時❶,

$$b(t,\zeta)d\sigma=0\ 。\tag{5_2}$$

試計算核 $\dfrac{\cos(\nu,r)}{r}$。引出橢圓 L_1 的參數方程:

$$x=\alpha+a+a\cos t,\ y=b\sin t,$$

及橢圓 L_2 的:

$$x=-\alpha-a+a\cos t,\quad y=b\sin t\ 。$$

若 t 及 ζ 兩點是在同一橢圓上,則重複 § 5 的計算我們求得

$$\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma=-\frac{b}{2a}\frac{d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}},\quad \varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\ 。$$

若 t 是在 L_1 上,而 ζ 是在 L_2 上,則

$$\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma=$$

$$=\frac{b\left[(\alpha+a)\cos\tau+a\sin^2\dfrac{\tau-\tau}{2}\right]d\tau}{2\left[(\alpha+a)^2+(\alpha+a)(\cos t-\cos\tau)+a^2\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}\right)\right]}。$$

最後,若 t 是在 L_2 上,而 ζ 是在 L_1 上,則

$$\frac{\cos(\nu,r)}{r}d\sigma=$$

$$=\frac{b\left[(\alpha+a)\cos\tau+a\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right]d\tau}{2\left[(\alpha+a)^2-(\alpha+a)(\cos t-\cos\tau)+a^2\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{t+\tau}{2}\right)\right]}。$$

以 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ 代表 $\mu(t)$ 在境界 L_1 及 L_2 上的數值。方程(4)可由以 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ 爲未知的一組方程所表示:

---

❶ 我們在這裏寫出的積分方程(4)及函數 $b(t,\zeta)$ 比起 §§ 31 及 32 中的略有不同,這樣作了爲的是使計算簡便,問題的性質並不由此改變。

$$\mu_1(t)+\frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\gamma\cos\tau-\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\mu_2(\tau)d\tau}{\gamma^2+\gamma(\cos t-\cos\tau)+\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)d\tau-\frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_1(\tau)d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}}=2bU\sin t, \qquad (6_1)$$

$$\mu_2(t)-\frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\gamma\cos\tau+\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)\mu_1(\tau)d\tau}{\gamma^2+\gamma(\cos t-\cos\tau)+\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)}-$$

$$-\frac{b}{2a\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_2(\tau)d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)d\tau=2bU\sin t。 \qquad (6_2)$$

爲簡短起見我們在這裏用了符號

$$\gamma=\frac{\alpha+a}{a}。$$

顯然，

$$\gamma>1。$$

將核分解成富里耶級數並保留有限項數，我們使方程組(6)變成退化，解它已是不難了。

我們在這裏試較詳細地分析當 γ 是足夠大，卽當兩流線型的橢圓間的距離比起它們的大小說是很大時的情況。在這情況中，保留含有 $\frac{1}{\gamma}$ 及 $\frac{1}{\gamma^2}$ 的各項，我們能近似地設

$$\frac{\gamma\cos\tau-\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2+\gamma(\cos t-\cos\tau)+\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\tau}{\gamma}+\frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2}-\frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2},$$

$$\frac{\gamma\cos\tau+\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\gamma^2+\gamma(\cos t-\cos\tau)+\sin^2\frac{t-\tau}{2}\left(1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\tau}{\gamma}-\frac{\cos 2\tau}{2\gamma^2}+\frac{\cos(t+\tau)}{2\gamma^2}\text{。}$$

再者，如已在§5中建立了的，

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{t+\tau}{2}}=$$

$$=\frac{a}{b}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(\cos kt\cos k\tau-\sin kt\sin k\tau)\right]\text{。}$$

現在方程組(6)可寫成下面式樣:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1(t)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\left[\cos kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos k\tau\,d\tau-\right.\\
&\quad\left.-\sin kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin k\tau\,d\tau\right]+\frac{b}{2a\gamma\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos\tau\,d\tau+\\
&\quad+\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos 2\tau\,d\tau-\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\cos t\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\cos\tau\,d\tau+\\
&\quad+\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\mu_2(\tau)\sin\tau\,d\tau=2bU\sin t;\\
&\mu_2(t)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}\left[\cos kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos k\tau\,d\tau-\right.\\
&\quad\left.-\sin kt\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin k\tau\,d\tau\right]-\frac{b}{2a\gamma\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos\tau\,d\tau+\\
&\quad+\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos 2\tau\,d\tau-\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\cos t\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\cos\tau\,d\tau+\\
&\quad+\frac{b}{4a\gamma^2\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\mu_1(\tau)\sin\tau\,d\tau=2bU\sin t\text{。}
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

將 $\mu_1(t)$ 及 $\mu_2(t)$ 分解成富里耶級數:

$$\mu_1(t)=A_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{(1)}\cos kt+B_k^{(1)}\sin kt,$$

$$\mu_2(t)=A_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k^{(2)}\cos kt+B_k^{(2)}\sin kt。$$

則

$$\left.\begin{aligned}
&A_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(1)}\cos kt+B_k^{(1)}\sin kt)-\\
&\quad-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k^{(1)}\cos kt-B_k^{(1)}\sin kt)+\\
&\quad+\frac{bA_1^{(2)}}{2a\gamma}+\frac{bA_2^{(2)}}{4a\gamma^2}-\frac{bA_1^{(2)}}{4a\gamma^2}\cos t-\frac{bB_1^{(2)}}{4a\gamma^2}\sin t=2bU\sin t,\\
&A_0^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^{(2)}\cos kt+B_k^{(2)}\sin kt)-\\
&\quad-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2k}(A_k^{(2)}\cos kt-B_k^{(2)}\sin kt)-\\
&\quad-\frac{bA_1^{(1)}}{2a\gamma}+\frac{bA_2^{(1)}}{4a\gamma^2}-\frac{ba_1^{(1)}}{4a\gamma^2}\cos t-\frac{bB_1^{(1)}}{4a\gamma^2}\sin t=2bU\sin t。
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

在(8)中比較左右兩邊的富里耶係數，我們求知僅係數 $B_1^{(1)}$ 及 $B_1^{(2)}$ 不是零，它們由下面方程所確定：

$$B_1^{(1)}\left(1+\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)-\frac{b}{4a\gamma^2}B_1^{(2)}=2bU,$$

$$-\frac{b}{4a\gamma^2}B_1^{(1)}+\left(1+\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)B_1^{(2)}=2bU。$$

由此
$$B_1^{(1)}=B_1^{(2)}=\frac{8ab(a+b)\gamma^2U}{8a^2\gamma^2-b(a+b)},$$

所以

$$\mu_1(t)=\mu_2(t)=\frac{8ab\,(a+b)\gamma^2U}{8a^2\gamma^2-b(a+b)}\sin t。\qquad(9)$$

現在
$$\frac{1}{i}w^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\mu_1(\tau)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\mu_2(\tau)}{\zeta-z}d\zeta,$$

或

$$\frac{1}{i}w^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{8ab(a+b)\gamma^2U}{8a^2\gamma^2-b(a+b)}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\sin\tau(-a\sin\tau+ib\cos\tau)d\tau}{a+\alpha+a\cos\tau+ib\sin\tau-z}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{\sin\tau(-a\sin\tau+ib\cos\tau)d\tau}{-(a+\alpha)+a\cos\tau+ib\sin\tau-z}\right\}。 \tag{10}$$

試計算(10)中的積分。在第一個積分裏標記 $z-(a+\alpha)=z'$，在第二個裏 $z+a+\alpha=z'$，我們獲得積分

$$I(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\tau(-a\sin\tau+ib\cos\tau)}{a\cos\tau+ib\sin\tau-z'}d\tau。$$

設 $e^{i\tau}=\sigma$。則

$$I(z')=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{(a+b)\sigma^2-(a-b)}{(a+b)\sigma^2-2z'\sigma+a-b}d\sigma-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|=1}\frac{(a+b)\sigma^2-(a-b)}{(a+b)\sigma^2-2z'\sigma+a-b}\frac{d\sigma}{\sigma^2}\right\}=I_1-I_2。$$

在 I_1 中被積函數的分母的根是

$$\sigma_1=\frac{z'+\sqrt{z'^2-c^2}}{a+b},\quad \sigma_2=\frac{z'-\sqrt{z'^2-c^2}}{a+b}。$$

選無限大正的 z' 所給是正的那個根的值。則重複 § 30 中的考究(見第 147 頁上的底註)，我們求得一個根 σ_2 是在圓圈 $|\sigma|<1$ 的裏面。現在不難求得

$$I_1=\frac{z'-\sqrt{z'^2-c^2}}{2i(a+b)}。$$

由完全相同辦法求得

$$I_2=-\frac{z'-\sqrt{z'^2-c^2}}{2i(a-b)}。$$

所以
$$I(z')=\frac{a}{i(a^2-b^2)}(z'-\sqrt{z'^2-c^2})。$$

最後

$$\frac{1}{i}w^*(z)=\frac{8a^2b\gamma^2U}{i(a-b)[(8a^2\gamma^2-b(a-b)]}(2z-\sqrt{(z-a-\alpha)^2-c^2}-$$

$$-\sqrt{(z+a+\alpha)^2-c^2}) \tag{11}$$

及

$$w(z)=Uz+\frac{8a^2b\gamma^2U}{(a-b)[8a^2\gamma^2-b(a-b)]}(2z-\sqrt{(z-a-\alpha)^2-c^2}-$$

$$-\sqrt{(z+a+\alpha)^2-c^2})。\quad(12)$$

若在公式(12)中設 $z'=z-a-\alpha$ 的數値固定並使 α 趨向無窮大,則結果得已知的相當於流過一個橢圓柱的複勢的式子:

$$w(z')=Uz'+\frac{bU}{a-b}(z'-\sqrt{z'^2-c^2})。$$

在較大的 α 時第二個柱的存在使第一個柱附近各點的速度改變量的級是 γ^{-2} 。

§37. 複連通區域的保角映射

(a)雙連通區域變爲圓環的保角映射。

試考究在複變數 z 的平面上一個爲外邊曲線 L_0 及裏邊曲線 L_1 所限定的環狀區域 D。試建立下面一個問題:把區域 D 映射到 $R<|w|<1$ 的圓環上,這映射使曲線 L_0 變爲圓周 $|w|=1$,曲線 L_1 變爲圓周 $|w|=R$。我們假定曲線 L_0 及 L_1 是平滑的,具有連續的曲率。

置 z 平面的坐標原點於 L_1 的裏面。用 L 表記區域 D 的境界。顯然,L 爲依反時針方向環過的曲線 L_0 與依順時針方向繞過的曲線 L_1 所組成。

映射函數 $w=\omega(z)$ 在 D 中旣不變爲零,也不變爲無窮大,故函數 $\ln\omega(z)=\ln w$ 在 D 中沒有奇點。依正方向繞曲線 L_0 行一週 w 的幅角增大了 2π,因爲這樣使 w 也依正方向描行圓周 $|w|=1$ 。由此知依正方向繞曲線 L_0 行一週 $\ln\omega(z)$ 得到了 $2\pi i$ 的增加,並知函數

$$\varphi(z)=\ln\frac{\omega(z)}{z}$$

在 D 中是正則的。不難求得 $\varphi(z)$ 所滿足的邊界條件。若 $t\in L_0$,則 $|\omega(t)|=1$,若又 $t\in L_1$,則 $|\omega(t)|=R$ 。因此

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\}=\begin{cases}-\ln|t|, & t\in L_0\\ -\ln|t|+\ln R, & t\in L_1\end{cases} \tag{1}$$

若給予 R 任意數值並建立符合條件(1)的調和函數，則它的共軛函數一般地說將不是在 D 中單值的。所以 R 必須接受下一要求：爲條件(1)所決定的解析函數 $\varphi(z)$ 在D中須是正則的。這樣，$\varphi(z)$ 實現出是變態的狄銳希勒問題的解，$\varphi(z)$ 的確定可以利用 § 32 的方法。

解具有條件(1)的變態的狄銳希勒問題，我們給予 R 某個單一的數值。設所得這一數值是小於一；試證明這時函數 $w=\omega(z)=ze^{\varphi(z)}$ 便實現區域 D 變到 $R<|w|<1$ 的環上的保角映射。因爲函數 $ze^{\varphi(z)}$ 在 D 中是正則的，祇要證明 L_0 及 L_1 映射到與之對應的圓周上是相互單值的就夠了。

若 $z\in L_0$，則 $\operatorname{Re}\{\varphi(z)\}=-\ln|z|$，所以 $|w|=1$。再者，$\arg w=$ $=\arg z+\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$。當 z 描出閉合的曲線 L_0 時，在 D 中調和的函數 $\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$ 回到原來的數值，而 $\arg z$ 增加了 2π。但這時 $\arg w$ 也增加了 2π，且 w 點描出閉合的圓周 $|w|=1$。餘下要證明的是在這圓周上的各點是與曲線 L_0 上的各點相互單值地相對應。爲此，祇要證明在 $|w|=1$ 時，$\arg w$ 是曲線 L_0 的弧長 σ 的增函數就夠了。

在 D 中調和的函數 $\ln|w(z)|$ 是在 L_0 上等於零，在 L_1 上等於 $\ln R<$ <0。依照調和函數的極大值及極小值定理，在 D 的裏面 $\ln|\omega(z)|<0$。但是這裏在 L_0 上 $\dfrac{\partial\ln|\omega(z)|}{\partial\nu}\geqslant 0$ (ν 是 L_0 的向外法線)。再者，由柯西-黎曼方程知在 L_0 上

$$\frac{\partial\arg\omega(z)}{\partial\sigma}=\frac{\partial\ln|\omega(z)|}{\partial\nu}\geqslant 0, \tag{2}$$

因此 $\arg w$ 是 σ 的不減函數。現在令 z_1 及 z_2 兩點相應於弧長 σ_1 及弧長 σ_2，在這裏 $\sigma_1<\sigma_2$，並設 $\arg\omega(z_1)=\arg\omega(z_2)$。則

$$0=\arg\omega(z_2)-\arg w(z_1)=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{\partial\arg\omega(z)}{\partial\sigma}d\sigma\ 。$$

由於不等式(2),在曲線 L_0 的弧線 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ 上將有 $\frac{\partial \arg \omega(z)}{\partial \sigma} \equiv 0$ 及 $\arg \omega(z) \equiv \alpha =$ 常數。於是在這弧線上 $\ln \omega(z) = \ln|\omega(z)| + i \arg \omega(z) = i\alpha$; 既然在某個弧線上是常數,解析函數 $\ln \omega(z)$ 也恆等於這一常數。因此

$$\varphi(z) = \ln \omega(z) - \ln|z| = i\alpha - \ln|z|,$$

並 $\varphi(z)$ 在 D 中不是正則的,這是錯的,因爲由建立這函數的方法顯然看出這點。這樣,我們知必須有 $\arg \omega(z_1) < \arg \omega(z_2)$,因此曲線 L_0 在圓周 $|w|=1$ 上的映射的相互單值獲得建立。

類似地可以證明 L_1 是相互單值地映射到圓周 $|w|=R$ [1] 上。

現在試證明由變態的狄銳希勒問題的解所確定的 R 的數值事實上是小於一。設想反面是對的。如同以前我們證明 L_0 是被函數 $w=\omega(z)$ 相互單值地映射到圓周 $|w|=1$ 上,但這次 $\ln R > 0$,且在 D 的裏面 $\ln|\omega(z)| > 0$。重複以前的考究,我們求得

$$\frac{\partial \arg \omega(z)}{\partial \sigma} \leqslant 0, \quad z \in L_0,$$

當 L_0 是依反時針方向繞行時,圓周 $|w|=1$ 是依順時針方行繞行的。這與這樣繞行時 $\arg w = \arg z + \mathrm{Im}\{\varphi(z)\}$ 增加 2π 的事實相矛盾。

由以上所講知僅存在着一個 R 的數值,由於它已給的兩不退化的曲線所限定的雙連通區域能映射到 $R < |w| < 1$ 的環上。

(б)複連通的區域變爲有直線截段的平面的保角映射。

設立一個保角映射的問題,它把一個爲平滑,具有連續曲率的閉合曲線 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 所圍限的$(n+1)$連通有限區域 D 映射到一個代表具有與虛數軸平行的直線截段的平面的區域 D_1 上。令區域 D 是位於 z 平面上,區域 D_1 是在 w 平面上。置坐標原點 $z=0$ 於 D 的裏面並使

[1] 現在能證明(2)中的等號不存在。事實上,在點 $z_0 \in L_0$ 處令 $\frac{\partial \ln|\omega(z)|}{\partial \sigma} = 0$。由此,顯然,$\left.\frac{\partial \ln|\omega(z)|}{\partial \sigma}\right|_{z=z_0} = 0$; 由此容易推得 $\omega'(z) = 0$,這是不可能的,因爲曲線 L_0 是平滑的。

它變成 $w=\infty$ 點。所求映射函數的式樣是

$$w=\frac{1}{z}+\varphi(z), \tag{3}$$

其中 $\varphi(z)$ 在 D 中是正則的。適當地選擇 w 平面中的坐標原點，我們將得到曲線 L_0 變過來的線段將是位於虛軸上。用 b_k 表記曲線 L_k 變過來的線段的橫坐標。則 $\varphi(z)$ 符合下面的邊界條件：

$$t\in L_k,\ \mathrm{Re}\{\varphi(t)\}=-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{t}\right)+b_k,\ b_0=0。 \tag{4}$$

這樣，$\varphi(z)$ 是變態的狄銳希勒問題的解。解此問題，我們求得函數 $\varphi(t)$，根據它我們唯一地重得橫坐標 b_k。若我們任意地固定在變態的狄銳希勒問題的解中的純虛數常數部分，則全然同樣地我們就唯一地求得 D_1 的邊界的各線段的極端點的縱坐標。

餘下要證的是函數（3）是單葉的❶。首先，它在 $z=0$ 點附近是單葉的，因爲在那裏對 z 說方程（3）是能夠單值地解出的。現在令 z_0 是 $\omega(z)$ 是單葉的各點中的一點，並令 $\omega(z_0)=w_0$。試考究積分

$$I(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega'(z)dz}{\omega(z)-w},$$

其中 L 是區域 D 的境界，w 是區域 D_1 的任一點。

等於在 D 的裏面的函數 $\omega(z)-w$ 的零點個數與極點個數的差值的積分 $I(w)$ 是一個整數。當 w 在 D_1 裏變時，$I(w)$ 保持是一個 w 的連續函數。既然是整數，$I(w)$ 是一個常數的數值。但是因爲 $\omega(z)-w_0$ 在 D 裏有一個極點 $z=0$ 及一個零點 $z=z_0$，$I(w_0)=0$。由此知若 $w\in D_1$，則 $I(w)\equiv 0$。在 D 裏函數 $\omega(z)-w$ 僅有一個一級極點 $z=0$，且因爲 $I(w)=0$，若僅 w 屬於區域 D_1，則在區域 D 中 $\omega(z)-w$ 恰有一個零點。

類似地也能考究某些別種的複連通區域的保角映射。複連通區域

---

❶ 下面所述的證明是我們引自 М. В. Келдыша 的論文"複連通區域變爲標準區域的保角映射"，數學科學成就，第 VI 期，1939。

變到爲同心圓周弧所截成或爲經過同一點的各線段所截成的平面上的保角映射問題便容易地這樣歸結到變態的狄銳希勒問題。

§ 38. 在空間中的狄銳希勒問題與牛曼問題 爲了簡單起見祇限於考究這樣有限或無限的區域，它的邊界是閉合的平滑的曲面 S，它符合所謂樂亞普納夫(Ляпунов)條件：

（1）在曲面 S 的兩點 M 及 M_1 處的法線間的角度 ϑ 符合不等式

$$\vartheta<Ar^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant1,$$

其中 A 及 α 是常數，r 是 M 與 M_1 間的距離。

（2）這樣地存在着一個常數 $\delta>0$，每一個與由 M 點引出的 S 的法線相平行的直線與曲面 S 在以 M 爲中心 δ 爲半徑的球裏面的部分相交不多於一次。

積分

$$V(M)=\frac{1}{4\pi}\int_S\rho(M_1)\frac{dS_1}{r},\tag{1}$$

$$W(M)=\frac{1}{4\pi}\int_S\sigma(M_1)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}dS_1,\tag{2}$$

如已知道的，分別稱爲單層勢與偶層勢；$\rho(M)$ 與 $\sigma(M)$ 叫相應各勢的密度。在公式（1）及（2）中，r 是 M 與 M_1 間的距離，其 M_1 爲曲面 S 的一點，M 爲 S 的裏面或外面的一點；ν_1 是 S 的向外法線，由 M_1 點引出者；dS_1 是曲面 S 的面元。

下面的提述是正確的❶（設密度 $\rho(M_1)$ 及 $\sigma(M_1)$ 是連續的）：

（1）單層勢與偶層勢都是在 S 的內部和外部的調和函數。

（2）單層勢在所有空間中都是連續的。

（3）若 ν 表記在 M 點處 S 的向外法線，指標 i 與 e 分別指在曲面 S 的裏面與外面的勢的數值，則在曲面 S 上單層勢的法線微商的數值

---

❶ 參看，例如，[12]。

爲下面兩公式所確定：

$$\frac{\partial V_i(M)}{\partial \nu}=-\frac{1}{2}\rho(M)+\frac{1}{4\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r,\nu)}{r^2}dS_1, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial V_e(M)}{\partial \nu}=\frac{1}{2}\rho(M)+\frac{1}{4\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r,\nu)}{r^2}dS_1。 \qquad (4)$$

（4）在曲面 S 上偶層勢的極限值爲下面兩公式所確定：

$$W_i(M)=\frac{1}{2}\sigma(M)+\frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r,\nu_1)}{r^2}dS_1, \qquad (5)$$

$$W_e(M)=-\frac{1}{2}\sigma(M)+\frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M)\frac{\cos(r,\nu_1)}{r^2}dS_1。 \qquad (6)$$

在公式（3）到（6）中 r 的方向是由 M_1 到 M 。

（5）偶層勢的法線微商由裏面過來或由外面過來在 S 上取得同一的數值。

也能證明的是若 M 及 M_1 是在曲面 S 上，則（見[12]）

$$\left|\frac{\cos(\nu,r)}{r^2}\right|<\frac{C}{r^{2-\alpha}}; \quad \left|\frac{\cos(\nu_1,r)}{r^2}\right|<\frac{C}{r^{2-\alpha}}; \qquad (7)$$

C＝常數，α 是樂亞普納夫條件中涉及的常數。

試考究在 S 的裏面的一個區域 D 的狄銳希勒問題。試用 $f(M)$ 表記未知的調和函數 W 在 S 上已給出的數值。所求的函數 W 將是具有不知的密度 $\sigma(M)$ 的偶層勢的式樣。利用公式（5），我們便得到這個不知密度的積分方程

$$\sigma(M)+\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r,\nu_1)}{r^2}dS_1=2f(M)。 \qquad (8)$$

不等式（7）中的第二個示出方程（8）的核有弱奇點。根據§10中的證明，弗列德和蒙的理論可以應用於這個方程。試證明方程（8）是可解的。依照弗列德和蒙的交比定理，考究齊次方程

$$\sigma_0(M)+\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\cos(r,\nu_1)}{r^2}dS_1=0。 \qquad (9)$$

從這方程並從公式(5)得出偶層勢

$$W_0(M)=\frac{1}{4\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}dS_1,$$

在 S 上從裏面過來的極限值等於零,式中 $\sigma_0(M)$ 是方程(9)的解。根據狄銳希勒問題的解的唯一性定理,在 D 的裏面 $W_0(M)\equiv 0$。但這時 $\frac{\partial W_{0i}}{\partial\nu}=0$。再者,由於性質(5),

$$\frac{\partial W_{0e}}{\partial\nu}=\frac{\partial W_{0i}}{\partial\nu}=0。$$

根據牛曼問題的解的唯一性定理, $W_{0e}(M)=$常數, 且因為在無窮遠處顯然 $W_{0e}=0$, 則 $W_{0e}(M)\equiv 0$。現在, 等式(5)及(6)相減, 我們求得

$$\sigma_0(M)=W_{0i}(M)-W_{0e}(M)\equiv 0。$$

這樣,齊次方程(9)僅有一恆等於零的解,所以方程(8)是可解的。解了它並把解代入(2)中,我們得到我們的狄銳希勒問題的解。

若我們考察在 S 外面的區域 D' 的狄銳希勒問題,並與以前相同地我們探求式樣是偶層勢的解,則利用公式(6)我們給予積分方程

$$\sigma(M)-\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r,\nu_1)}{r^2}dS_1=-2f(M)。\qquad(10)$$

一般地說,這方程是不可解的。實際上,考究齊次方程

$$\sigma_0(M)-\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\cos(r,\nu_1)}{r^2}dS_1=0\qquad(11)$$

並重複以前的探討,我們求知必須有 $\sigma_0(M)=$常數。$\sigma_0(M)$ 的這個數值符合方程(11),這從已知的高斯公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\cos(\nu_1,r)}{r^2}dS_1\equiv 1,\quad M\in S$$

直接地示出。這樣,因為與之相應的齊次方程有不恆等於零的解,非齊次方程(11)是不可解的。

方程(10)的不可解是可以早些預先看出的。實際上，偶層勢在無窮遠處依 R^{-2} 式樣減小，其 R 爲由坐標原點到 M 點的距離，而在 D' 中任一調和函數則僅依 R^{-1} 式樣減小。

對於區域 D' 的狄銳希勒問題，我們將探求式樣爲

$$W(M)=\frac{1}{4\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\,dS_1-\frac{1}{2R}\int_S \sigma(M_1)dS_1 \tag{12}$$

的解。我們置坐標的原點於 S 的裏面。(12)式引到未知函數 $\sigma(M)$ 的積分方程

$$\sigma(M)-\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(\nu_1,\ r)}{r^2}dS_1+\frac{1}{R}\int_S \sigma(M_1)dS_1=-2f(M)。 \tag{13}$$

試考究齊次方程

$$\sigma_0(M)-\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\cos(\nu_1,\ r)}{r^2}dS_1+\frac{1}{R}\int_S \sigma_0(M_1)dS_1=0\ 。 \tag{14}$$

它示出在 D' 中的調和函數

$$\frac{1}{4\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}dS_1$$

及

$$\frac{1}{2R}\int_S \sigma_0(M_1)dS_1$$

在 S 上合而爲一。於是它們是恆等的。

因此
$$\int_S \sigma_0(M_1)\,dS_1\equiv\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma_0(M_1)\,R\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\,dS_1。$$

現在設想 $R\to\infty$ 並注意這使 $R\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\to 0$，我們得到

$$\int_S \sigma_0(M_1)dS_1=0\ 。 \tag{15}$$

現在方程(14)與(11)合而爲一。由此知 $\sigma_0(M)\equiv$ 常數。將此代入

(15)，我們求得 $\sigma_0(M)\equiv 0$ 。這些證明了方程(13)的可解性。

回到牛曼問題。用 $\psi(M)$ 表記所探求的調和函數，在 S 上它的法線微商已給出；我們將探求式樣爲單層勢(1)的解。區域 D 的牛曼問題引我們到積分方程

$$\rho(M)-\frac{1}{2\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(\nu,r)}{r^2}dS_1=-2\psi(M), \tag{16}$$

而區域 D' 的引到方程

$$\rho(M)+\frac{1}{2\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(\nu,r)}{r^2}dS_1=2\psi(M)。 \tag{17}$$

方程(17)是與(8)共軛的，並與後者同樣地永是可解的。這樣，在三維空間中牛曼的"外"問題永是可解的。

方程(16)是與(10)共軛的。方程(16)的可解性的必要與充分的條件是它的右邊部分與方程(11)的解成正交的。如我們已看到的，這方程的唯一解是常數，所以方程(16)的可解性的條件引到下面：

$$\int_S \psi(M_1)dS_1=0\ 。 \tag{18}$$

由調和函數的理論知道爲了牛曼的"內"問題有解條件(18)是必要的。我們的探討現在也建立了這條件的充分性。

作爲結論，試考究具有可變參數 λ 的方程

$$\rho(M)-\frac{\lambda}{2\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(\nu,r)}{r^2}dS_1=0\ 。 \tag{19}$$

我們已看到，$\lambda=-1$ 是正則值，且 $\lambda=+1$ 是這方程的特徵值。試證明方程(19)的所有特徵值都位於 $\lambda\geqslant 1$ 及 $\lambda<-1$ 兩直線上。考究單層勢

$$V(M)=\frac{1}{4\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{dS_1}{r},$$

其中 $\rho(M)$ 是方程(19)的非自明解。公式(3)及(4)使我們能把方程(19)寫成下面式樣：

$$\frac{\partial V_i}{\partial \nu}-\frac{\partial V_e}{\partial \nu}+\lambda\left(\frac{\partial V_i}{\partial \nu}+\frac{\partial V_e}{\partial \nu}\right)=0,$$

或

$$(1+\lambda)\frac{\partial V_i}{\partial \nu}=(1-\lambda)\frac{\partial V_e}{\partial \nu}\text{。}\tag{20}$$

回憶，根據性質(2)，$V_i=V_e$。設 λ, $\rho(M)$ 及 $V(M)$ 是複數，用 $\bar{V}_i=$ $=\bar{V}_e$ 乘(20)並對 S 積分。又設 $V=V_1+iV_2$。則我們得

$$(1+\lambda)\left\{\int_S\left(V_{1i}\frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu}+V_{2i}\frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu}\right)dS+\int_S\left(V_{1i}\frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-V_{2i}\frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu}\right)dS\right\}=(1-\lambda)\left\{\int_S\left(V_{1e}\frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu}+V_{2e}\frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu}\right)dS+\right.$$

$$\left.+\int_S\left(V_{1e}\frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu}-V_{2e}\frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu}\right)dS\right\}\text{。}$$

因爲函數 V_{1i}, V_{2i} 在 S 裏面是調和的，而 V_{1e}, V_{2e} 在 S 外面是調和的，左邊的第二個積分與右邊的第二個積分都等於零。因此我們可以得到一個較簡單的等式

$$(1+\lambda)\int_S\left(V_{1i}\frac{\partial V_{1i}}{\partial \nu}+V_{2i}\frac{\partial V_{2i}}{\partial \nu}\right)dS=$$

$$=(1-\lambda)\int_S\left(V_{1e}\frac{\partial V_{1e}}{\partial \nu}+V_{2e}\frac{\partial V_{2e}}{\partial \nu}\right)dS\text{。}\tag{21}$$

回憶勢理論的著名公式：若區域 B 是曲面 Σ 所限定的（不管是裏面的或是外面的），$V(M)$ 是在 B 中的一個調和函數，且對區域 B 來說 n 是 Σ 的向外法線，則

$$\int_\Sigma V\frac{\partial V}{\partial n}dS=\int_B\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz\text{。}$$

由此，在特殊情況，知

$$\int_\Sigma V\frac{\partial V}{\partial n}\geqslant 0;$$

僅在 $V=$常數的情況中等號成立；也僅當 B 是在 Σ 的裏面時才可能有 $V\neq 0$。

對 S 來說法線 ν 已被我們選為向外的。在這情況中它對 D 說將是向外的而對 D' 說是向內的；由此知在 (21) 中左邊的積分不是負值的，右邊的積分不是正值的。

下述的各種情況是可能的：

(a) 在 (21) 中右邊的積分等於零。則 $V_e \equiv 0$，並因為在 S 上 $V_i = V_e$，則 $V_i \equiv 0$ 及 $\rho(M) = \frac{\partial V_e}{\partial \nu} - \frac{\partial V_i}{\partial \nu} \equiv 0$。這情況不引到特徵值 λ。

(б) 在左邊的積分等於零，而右邊的積分不等於零。我們得到我們已知的特徵值 $\lambda = 1$。

(в) 左邊的積分是正的，而右邊的積分是負的。這時必須是 $1 - \lambda < 0$，$1 + \lambda > 0$，或者 $1 - \lambda > 0$，$1 + \lambda < 0$，也就是 $\lambda > 1$，或 $\lambda < -1$。

第二章　雙調和方程
（格臨函數的應用）

§39. 引到雙調和方程的問題

(a)**彈性理論的平面問題**　若彈性位移僅在與(x,y)平面平行的平面中發生，且位移的各分量不與z有關，則我們所談的將是平面的形變。用u_x，u_y表記位移的分量，用σ_x，τ_{xy}，σ_y表記應力的分量，我們能寫出一組彈性理論中平面問題的微分方程❶：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\sigma_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),\quad \sigma_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}。 \tag{2}$$

這裏λ與μ是拉美係數，及

$$\theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}。 \tag{3}$$

方程組(1)—(2)中的未知函數的數能夠歸減到一個。就是，設

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 W}{\partial y^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \tag{4}$$

能滿足方程(1)。函數$W(x,y)$叫應力函數或愛瑞函數。把(4)式代入(2)並消去u_x及u_y，我們求知愛瑞函數滿足雙調和方程

$$\Delta^2 W=\Delta(\Delta W)=\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=0。 \tag{5}$$

這樣，彈性理論的平面問題的解便歸結到在相應邊界條件下雙調和方程的求積。

試闡明這些條件是什麽。若彈性區域的邊界上各點的位移已給

---

❶ 方程(1)相當於當物體不受徹體力的作用時的情形。見[28a]。

出，它們的建立最簡單。在這情況中，用 L 表記彈性區域的境界，在 L 上就有

$$u_x=g_1(t),\quad u_y=g_2(t),\tag{6}$$

其中 t 是確定在 L 上點的位置的參數，而 $g_1(t)$ 及 $g_2(t)$ 是已給的函數。

現在設作用於境界 L 上的外力已給出。用 X_ν 及 Y_ν 表記它的分量，我們根據變形媒質力學的已知公式有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y)=X_\nu,\\ \tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)=Y_\nu\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

在這裏 ν 是境界 L 的向外法線。注意

$$\cos(\nu,x)=\frac{\partial y}{\partial s},\ \cos(\nu,y)=-\frac{\partial x}{\partial s},$$

其中 s 是境界的弧長。

把用愛瑞函數表出的應力式子代入(7)，我們得

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)=X_\nu,\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)=-Y_\nu,$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x}=-\int Y_\nu ds+C_1=f_1(s)+C_1,\\ \frac{\partial W}{\partial y}=\int X_\nu ds+C_2=f_2(s)+C_2\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

等式(8)也代表在給出外力作用在邊界上的情況時我們問題的邊界條件。若境界 L 是單連通的，則常數 C_1 及 C_2 能任意固定，若這境 L 界是複連通的，則 C_1 及 C_2 在不同曲線上，卽在 L 的不同部分上，可有不同的數值。在這情況中它們必須從位移的單值性的要求來確定之。在這意義上彈性理論的平面問題是與變態的狄銳希勒問題相類似。

已指出的邊界條件的類型不是唯一的。

在下面，在各相應的地位中，我們將指出邊界條件的一些別種類型。

與條件(6)及(8)相應的問題我們將分別叫它爲第一及第二基本雙調和問題❶。

(6)粘滯不可壓縮的液體的穩定平面運動 在這情況中挪維-斯陶克斯方程❷有下面的形式

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=\nu\Delta v_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=\nu\Delta v_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}&=0。\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

在這裏 v_x 及 v_y 是速度的分量，p 是壓力，ρ 是液體的密度，ν 是粘滯係數。方程(9)是在徹體力不存在的假定下寫出的。

方程(9)的第三式指出有一函數存在着，這函數 $\Phi(x,y)$ 叫流動函數，它是這樣的：

$$v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}。\qquad(10)$$

把這兩式代入(9)的頭兩個方程中並消去 p，我們求得流動函數所符合的方程

$$\Delta^2\Phi=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial y}\right)。\qquad(11)$$

若在方程(9)中忽視慣性項，則(11)的右面部分消失，我們得知 Φ 滿足雙調和方程。

在粘滯液體的理論中有此假定：與剛體接連的液體粘貼在剛體上，致使剛體的速度和與之接連的液體粒子的速度相合。。由此容易引出流動問題中的邊界條件。若一粘滯液體的流動流過一個或多個物體，

❶ 第二問題在 Н. И. Мусхелишвили 的書[28a]中首次叫具有條件(8)的彈性理論的邊界問題。

❷ 見 Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, 理論流體力學，第二部分，1948。

且爲簡便起見設這些物體是固定不動的，則在這些物體的邊界上

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0 。 \tag{12}$$

若 x 軸的方向是與無窮遠處的流動速度相平行的，並以 U 表記這速度的數值，則在無窮遠處的條件有如下形式：

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}[\Phi(x, y)-Uy]=C, \quad C=\text{常數}。 \tag{13}$$

在下面我們將看出，若略去慣性項，粘滯液體的無限流動中，流過一個剛體的問題是不可解的。這就是所謂斯陶克斯的佯謬。

許多其他數學物理的問題也歸結到雙調和方程。例如，關於板在與其表面垂直的應力的作用下的撓曲問題就引到式樣爲 $\Delta^2 W=p(x,y)$ 的方程。海洋學的某些問題❶也引到同類型的方程。

§ 40. 雙調和函數的複數表示 任一雙調和函數 $W(x,y)$（卽雙調和方程的積分）能用兩個複變數 $z=x+iy$ 的解析函數來表示。這可能用下面的辦法來作出。因爲 $\Delta P=\Delta^2 W=0$，函數 $P(x, y)=\Delta W$ 是調和的。令 $Q(x,y)$ 是與 $P(x,y)$ 共軛。表記 $P+iQ=4\varphi'(z)$。函數

$$\varphi(z)=p(x, y)+iq(x, y)=\frac{1}{4}\int(P+iQ)dz$$

是 z 的解析函數。用簡單計算容易驗證 $\Delta(W-px-qy)=0$，卽函數 $p_1(x, y)=W-px-qy$ 是調和的。設 $p_1(x, y)=\mathrm{Re}\{\chi(z)\}$ 並注意 $px+$ $+qy=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z)\}$，我們得到**高爾剎公式**：

$$W(x, y)=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)\}, \tag{1}$$

給出用複變數解析函數 $\varphi(z)$ 及 $\chi(z)$ 表出的所求雙調和函數的式子。我們把函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)=\chi'(z)$ 將叫作高爾剎函數。

用給出的函數 $W(x, y)$ 所確定的高爾剎函數不是完全地單值的。卽，$\varphi'(z)$ 是被確定得準到一個純虛的常數項（卽 $\varphi'(z)$ 有一加上的虛常

❶ 見 B. B. Штокман 在不均勻的場中風能激成的全流的場的方程。AH CCCP 的報告，1946，卷 IV，№5。

數的數值不確定)，所以，$\varphi(z)$是被確定得準到式樣爲 $i\alpha z+\beta$ 的一項，其中 α 是實常數，β 是複常數。函數 $\psi(z)$ 也不完全確實地被確定，但這對以後並不重要。

從高爾利公式容易地得到兩個重要公式，它們的式樣是 Н. И. 穆斯黑里施維利(Мусхелишвили)所建立的最終式樣。第一個給出用高爾利函數表示的雙調和函數的微商的式子：

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

其中

$$\psi(z)=\chi'(z)。 \tag{3}$$

第二個公式是關於彈性理論的平面問題；它給出用高爾利函數表示的位移的式子，其式樣是

$$2\mu(u_x+iu_y)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}。 \tag{4}$$

在這裏表記

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}。$$

注意 $\varkappa>1$。從高爾利公式及 § 39 的方程(2)與(4)容易得到公式(2)及(4)。

也注意連繫應力於高爾利函數的兩個考斐少夫(Г. В. Колосов)公式

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}, \tag{5}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]。 \tag{6}$$

公式(2)及(4)使彈性平面理論的基本問題能歸結於解析函數理論的邊界問題。第一個問題引到解析函數 $\varphi(z)$及 $\psi(z)$的建立，使其在區域的境界上滿足等式

$$\varkappa\varphi(z)+\overline{z\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}=2\mu(g_1+ig_2)。 \tag{7}$$

在第二個問題中必須建立滿足境界等式

在 L_k 上

$$\varphi(z)+\overline{z\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=f_1+if_2+b_k,\quad b_k=\text{常數}, \tag{8}$$

的解析函數 $\varphi(z)$及 $\psi(z)$。這裏

$$f_1+if_2=i\int_{s_0}^{s}(X_\nu+iY_\nu)ds, \tag{9}$$

其中 X_ν 及 Y_ν 乃是作用於境界上的外力的 x 與 y 軸方向的分力。常數 b_k 必須這樣地確定,它使位移示出是單值的。

在粘滯液體的流體動力學中的流動問題也歸結到這相同的邊界問題,但沒有右邊部分的任務中的任意性❶。

注意下點是有用的:等式(8)可能認作是等式(7)在 $\varkappa=-1$ 的特殊情形。

有時情況是這樣的:把滿裝有彈性媒質或粘滯液體的區域首先保角映射到某個別的區域上是有用的。這樣公式(7)及(8)就有些改變了。令 $z=\omega(\sigma)$爲映射函數。表記

$$\varphi(z)=\varphi(\omega(\sigma))=\Phi(\sigma);\quad \psi(z)=\psi(\omega(\sigma))=\Psi(\sigma)。$$

則等式(7)及(8)就爲以下所代替:

$$\varkappa\Phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\Phi'(\sigma)}-\overline{\Psi(\sigma)}=2\mu(g_1+ig_2) \tag{10}$$

及

$$\Phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\Psi(\sigma)}=f_1+if_2+b_k。 \tag{11}$$

現在闡明高爾剎函數的解析特性。若滿裝彈性媒質的區域是有限的,單連通的並無聚集的力或力矩施於其上,則 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$在這區域中僅是正則的。與此正相同,在單連通的,有限的,裝滿粘滯液體的區域中,若這區域中沒有源頭或尾閭(泉源或漏口),$\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$是正則的。

現在從事複連通區域的情況。照例用 L 表它的境界,以 $L_1, L_2\cdots$, L_n 表記它裏面的各曲線部分(若這區域是有限的),以 L_0 表記由外面

❶ 所以,沒有位移單值性的這種附加的要求。

限定這區域的曲線。用 D 字表記這區域。

試考究在彈性理論的平面問題中必須加於高爾利函數的性質上的限制。由 § 39 的公式(4)顯然

$$P(x,y)=\Delta W=\sigma_x+\sigma_y\text{。}$$

應力，也與位移一樣，都是單值的函數。因此知 $P(x, y)$是單值的。由此依反時針方向繞裏面曲線 $L_1, L_2, \cdots, L_k$ 的每一個行一週 $Q(x,y)$的變量將是一個常數。用 $8\pi A_k$ 表記這個變量。則這樣繞行使 $\varphi'(z)$得到等於 $2\pi i A_k$ 的變量。若 z_k 是內曲線 L_k 的一點，則由於這樣繞行 $A_k\ln(z-z_k)$也得到 $2\pi i A_k$ 的變量。由此知

$$\varphi'(z)=\sum_{k=1}^{n}A_k\ln(z-z_k)+f(z),\tag{12}$$

其中 $f(z)$是在 D 中正則的函數，A_k 是實常數。不難看出，不定積分

$$\int f(z)dz$$

也能含有對數項，所以，積分等式(12)，我們得

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n}A_k z\ln(z-z_k)+\sum_{k=1}^{n}B_k\ln(z-z_k)+\varphi^*(z)\text{。}\tag{13}$$

在這公式裏 $\varphi^*(z)$ 是一個在 D 中正則的，單值的函數；B_k 是複常數，A_k，如我們在上面已看到，是實常數。

回到函數 $\psi(z)$。公式(12)示出 $\varphi''(z)$是單值的。現在由(6)得出 $\psi'(z)$也是單值的，且它的不定積分含有對數項：

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{n}C_k\ln(z-z_k)+\psi^*(z),\tag{14}$$

其中 $\psi^*(z)$是一個在 D 中正則的函數。

在公式(13)及(14)的導出中我們僅利用了應力的單值性。試說明位移單值性的要求給於係數 A_k, B_k, C_k 什麼樣的限制。公式(4)示出由於繞曲線 L_k 行一週 $2\mu(u_x+iu_y)$得到

$$2\pi i[(\varkappa+1)A_k z+\varkappa B_k+\bar{C}_k]$$

的變量。

因爲位移是單值的，這數值等於零。

由此知

$$A_k=0, \quad C_k=-\varkappa\overline{B}_k, \tag{15}$$

且我們最後得在彈性理論的平面問題中高爾利函數的下面的式子:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\sum_{k=1}^{n}B_k\ln(z-z_k)+\varphi^*(z),\\ \psi(z)&=-\varkappa\sum_{k=1}^{n}\overline{B}_k\ln(z-z_k)+\psi^*(z)。\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

係數 B_k 有簡單的力學上的意義:

$$B_k=-\frac{X_k+iY_k}{2\pi(1+\varkappa)}, \tag{17}$$

其中 X_k 及 Y_k 是作用於曲線 L_k 上的外力的合向量的分量。在第二基本問題中由於邊界條件這些係數是已知的，在第一基本問題中它們尙屬未知的。

在粘滯液體的流體動力學中高爾利函數的多值性有某些別的特性。在這裏必須要求速度的單值性，卽雙調和函數的微商的單值性。公式(13)仍是有效的。再者，由公式(4)顯而易見，由於依反時針方向繞曲線 L_k 行一週 $\psi(z)$ 得到等於 $2\pi iB_k$ 的變量，所以

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{n}\overline{B}_k\ln(z-z_k)+\psi^*(z), \tag{18}$$

其中 $\psi^*(z)$ 在 D 中是正則的。

我們與第一及第二基本問題一起表述另一個我們將叫它作第三雙調和問題：依照已給出在區域的境界上的一階微商，求雙調和函數，設它的這些微商及它的高爾利函數的一階微商在所考的區域中都是單值的。

所以，在第三問題中，我們設 $\varphi(z)$ 能依照公式(16)來表示，而 $\psi(z)$ 能依照公式(18)來表示。注意在單連通域區的情況中第二及第三問題

合而爲一。

能夠證明：我們所表述的三個問題的每一個有唯一解❶。

上面已提的斯陶克斯佯謬是第三問題的解的唯一性的直接結果。事實上，若液體僅流過一個物體，則滿裝液體的區域是單連通的，高爾剎函數是單值的，且這流動問題與第三問題相合，在這問題中必須設立下列條件：所求函數的一階微商在邊界上等於零及在無窮遠處是有限的❷。根據唯一性定理，所求雙調和函數恆等於一常數。但這樣它的微商，即速度，是恆等於零，所以結果得流過一個剛體的粘滯液體是靜止不動的。

若粘滯液體流過多個剛體，則利用係數 A_k 的隨意性可能得其解。在這情況中僅當區域是雙連通的時這流動問題才有唯一解；若區域的連通是多於二的，則有無限多的解。

§ 41. 格臨函數及施窪而茨核 令 D 爲單連通的或複連通的 $z=$ $=x+iy$ 平面上的有限區域，並令 z 與 $\zeta=\xi+i\eta$ 爲區域 D 中的任兩點。用 r 表記這兩點間的距離：$r=|z-\zeta|$。如已知的，區域 D 的兩點的，有下列性質的函數 $G(x, y; \xi, \eta)$ 就叫作這區域的格臨函數：

(a) $$G(x, y; \xi, \eta)=g(x, y; \xi, \eta)-\ln r, \tag{1}$$

其中 $g(x, y; \xi, \eta)$ 是在固定的 x 與 y 時 ξ 與 η 的在 D 中調和的函數。

(б)若 $\zeta=\xi+i\eta$ 點屬於區域 D 的境界線，則

$$G(x, y; \xi, \eta)=0 。\tag{2}$$

解具有在區域 D 的境界 L 上 $g=\ln r$ 的邊界條件的狄銳希勒問題，函數 $g(x, y; \xi, \eta)$ 就可能建立。

由性質(a)及(б)得出格臨函數的對稱性：

$$G(x, y; \xi, \eta)=G(\xi, \eta; x, y)。\tag{3}$$

利用格臨函數得完整形式地解狄銳希勒問題：若 $U(x,y)$ 是一個在

---

❶ 見[27d]。

❷ 後者來自在無窮遠處 $v_x=U$, $v_y=0$ 。

D 中調和的函數，在境界的 ζ 點等於 $u(\zeta)$，則

$$U(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_L u(\zeta)\frac{\partial G}{\partial\nu}d\sigma,\quad d\sigma=|d\zeta|,\tag{4}$$

其中 ν 在這次表記在 ζ 點處 L 的向內法線。

由格臨函數的對稱性得出它不僅是 ξ 及 η 的調和函數，且除 (ξ,η) 點外它在全區域 D 中也是 x 及 y 的調和函數。

茲介紹爲今後重要的格臨複函數的概念。我們將認 $G(x,y;\xi,\eta)$ 爲複變數 ζ 及 z 的函數並與此相應將用 $G(z;\zeta)$ 來表記它。試構成對變數 x 及 y 說是與 $G(z;\zeta)$ 共軛的函數 $H(z;\zeta)$。例如，可能設

$$H(z;\zeta)=\int_a^z-\frac{\partial G}{\partial y}dx+\frac{\partial G}{\partial x}dy,\tag{5}$$

其中 a 是一個任意的，但在區域 D 中固定的點。函數 $H(z;\zeta)$ 是其變數的多值實函數。對它的某一支說有恆等式

$$H(a;\zeta)\equiv 0\text{。}\tag{6}$$

我們把函數

$$M(z;\zeta)=G(z;\zeta)+iH(z;\zeta)\tag{7}$$

叫作格臨複函數。$M(z;\zeta)$ 是一個 z 的解析但在 D 中非正則的函數並是變數 ζ 的非解析的函數。

因爲格臨複函數含有 $\ln(\zeta-z)$ 項，格臨複函數是多值的。此外，若區域 D 是複連通的，在 z 平面上區域的任一內境界繞行一週這函數改變它的數值。如以前一樣，用 L_0 表記區域 D 的外境界，用 $L_1, L_2,\cdots, L_n$ 表記它的內境界。依反時針方向繞 L_k 行一週函數 $H(z;\zeta)$ 得到某變量，這變量，一般地說，將是 ζ 的函數。用 $2\pi b_k(\zeta)$ 來表記它。

$$b_k(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}-\frac{\partial G}{\partial y}dx+\frac{\partial G}{\partial x}dy\text{。}$$

在這裏 $\zeta=\xi+i\eta$ 是在區域 D 的內部的一點，$z=x+iy$ 是曲線 L_k 的一點。用 n 表記在 z 點 L_k 的向內法線的方向並設 $|dz|=ds$。顯然，

$$\frac{dx}{ds}=\cos(s,\ x)=-\cos(n,\ y),$$

$$\frac{dy}{ds}=\cos(s,\ y)=\cos(n,\ x),$$

由此連着得

$$b_k(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\partial G}{\partial n}ds\ 。\tag{8}$$

依反時針方向繞 L_k 行一週格臨複函數得到等於 $2\pi i b_k(\zeta)$ 的變量。若 z_k 是在 L_k 的裏面任意固定的一點，則同樣繞行函數 $b_k(\zeta)\ln(z-z_k)$ 得到相同的變量。這樣，格臨複函數能用下面式樣表示：

$$M(z;\zeta)=M_0(z;\zeta)+\sum_{k=1}^{n}b_k(\zeta)\ln(z-z_k)-\ln(\zeta-z),\tag{9}$$

其中 $M_0(z;\zeta)$ 是 z 的在 D 中正則的函數。注意，看成 ζ 的函數時，$M_0(z;\zeta)$ 是單值的。

試證 $b_k(\zeta)$ 是在 D 中調和的 ξ 及 η 的函數，在 L_k 上等於一，在 L_j 上等於零，$j=0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$ 。

在(8)中以 z 代替 ζ 並以 ζ 代替 z 。與此相應，以 ν 代替 n 並以 $d\sigma$ 代替 ds 。則我們得

$$b_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\partial G}{\partial \nu}d\sigma\ 。$$

我們介紹進來一個境界 L 的點 ζ 的函數 $\delta_k(\zeta)$，設

$$\delta_k(\zeta)=\begin{cases}1, & 若\ \zeta\ 是在\ L_k\ 上,\\ 0, & 若\ \zeta\ 是在\ L_j\ 上,\ j\neq k\ 。\end{cases}\tag{10}$$

則 $b_k(z)$ 可能用如下式樣來表示：

$$b_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{L}\delta_k(\zeta)\frac{\partial G}{\partial \nu}d\sigma\ 。\tag{11}$$

以此與(4)相比較使我們相信我們的提示的正確性。

現在在公式(9)中令 z 表記區域 D 裏面的一點，ζ 表記境界 L 的

一點，ν 爲在 ζ 點處 L 的向內法線。設

$$\frac{\partial b_k(\zeta)}{\partial\nu}=a_k(\zeta) \tag{12}$$

及

$$\frac{\partial M(z;\zeta)}{\partial\nu}=T(z;\zeta)。 \tag{13}$$

對 ν 微分(9)，得

$$T(z;\zeta)=\frac{\partial M_0(z;\zeta)}{\partial\nu}+\sum_{k=1}^{n}a_k(\zeta)\ln(z-z_k)-\frac{1}{\zeta-z}\frac{\partial\zeta}{\partial\nu}。 \tag{14}$$

函數 $T(z;\zeta)$ 我們將叫它作區域 D 的施窪而茨核。試建立它的重要性質。

施窪而茨核是變數 z 的在 D 中解析的函數，若區域 D 是複連通的，它是多值的。依反時針方向繞 L_k 行一週它得到等於 $2\pi ia_k(\zeta)$ 的變量。再者，$T(z;\zeta)$ 是 ζ 的單值的及非解析的函數。施窪而茨核的實部分是格臨函數的法向微商。它的虛部分的某一支在 $z=a$ 處是恆等於零。

$$\operatorname{Im}\{T(a;\zeta)\}\equiv 0。 \tag{15}$$

令 $f(z)$ 爲境界 L 上點的連續實函數。試考究積分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L f(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma, \tag{16}$$

$\Phi(z)$ 是 z 的一個解析函數。由公式(4)顯而易見它的實部分是在 D 中單值的並在境界上等於 $f(\zeta)$。再者，公式(15)示出 $\Phi(z)$ 的虛部分的某一支在 $z=a$ 處等於零。這樣，若僅它的實部分是單值的，公式(16)依照它的實部分的境界值又簡成一解析函數。

令 $F(z)=u(z)+iv(z)$ 是在 D 的裏面沒有奇點的一個解析函數。又設它的實部分 $u(z)$ 在 D 中是單值的且直至境界是連續的。如我們已看到的，積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_L u(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma$$

是 z 的解析函數，它的實部分等於 $u(z)$。這樣的函數僅在虛常數上能與 $F(z)$不同。這積分的虛部分的某一支在 $z=a$ 點等於零。由此容易看出

$$\frac{1}{2\pi}\int_L u(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=F(z)-iv(a)。\tag{17}$$

在這公式中 $v(a)$是函數 $v(z)$的某一支在 a 點的數值。

若在 D 中調和的函數 $u(z)$是單值的，則與它共軛的函數 $v(z)$一般地說是多值的。公式(17)給出根據 $u(z)$的境界值來計算依反時針方向繞 L 行一週 $v(z)$ 所得到的變量的可能性。這變量顯然是等於

$$\int_L u(\zeta)a_k(\zeta)d\sigma 。\tag{18}$$

若 $v(z)$的虛部分是單值的並直到境界是連續的，則與公式(17)相似，正確公式是

$$\frac{1}{2\pi}\int_L v(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{i}F(z)-\frac{1}{i}u(a)。\tag{17$_1$}$$

由此依反時針方向繞 L_k 行一週 $F(z)$的實部分的變量等於積分

$$-\int_L v(\zeta)a_k(\zeta)d\sigma 。\tag{19}$$

若 $F(z)$是單值的，則積分(18)及(19)等於零。由此容易得到對任一在 D 中正則的並直到境界是連續的解析函數都是正確的公式：

$$\int_L F(\zeta)a_k(\zeta)d\sigma=0,\tag{20}$$

$$\int_L \overline{F(\zeta)}a_k(\zeta)d\sigma=0 。\tag{21}$$

對在 D 中正則的，單值的函數 $F(z)$說，公式(17)及(17_1)同時是正確的。用 i 乘(17_1)並在其後將結果與(17)相加及相減，我們得兩個對以下重要的公式：

$$\frac{1}{4\pi}\int_L F(\zeta)T(z;\ \zeta)d\sigma = F(z) - \frac{1}{2}F(a), \tag{22}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_L \overline{F(\zeta)}T(z;\ \zeta)d\sigma = \frac{1}{2}\overline{F(a)}。 \tag{23}$$

我們特指出公式(22)及(23)僅對在 D 中正則且因之單值的函數 $F(z)$ 說是成立的。

我們注意在 $F(z)\equiv 1$ 時得到的公式(22)的特別情況：

$$\frac{1}{2\pi}\int_L T(z;\zeta)d\sigma \equiv 1。 \tag{24}$$

格臨複函數有我們叫對保角變換說的不變式的性質。它是如下所述的：

令函數 $t=\varepsilon(z)$ 使 z 平面的區域 D 保角映射到 t 平面的區域 D' 上並令 $M'(t;\ \tau)$ 爲區域 D' 的格臨複函數。則區域 D 的格臨複函數是由公式

$$M(z;\ \zeta) = M'(\varepsilon(z);\ \varepsilon(\zeta)) \tag{25}$$

確定。公式(25)的證明簡單地由格臨函數的定義得到。

緣法線微分上一等式的兩端，我們求得區域 D 與 D' 的施窪而茨核間的關係：

$$T(z;\ \zeta)d\sigma = T'(\varepsilon(z);\ \varepsilon(\zeta))d\sigma', \quad d\sigma' = |d\tau|。 \tag{26}$$

最後，我們證明一些以後我們需要的關於施窪而茨核的定理。

定理 1. 令 $f(z)$ 爲境界 L 上點的函數，它緣 L 是連續的並緣這境界線的某段弧線 L'，是 m 次連續地可微分的。此外，令法線 ν 與實數軸間的角緣 L' 也是 m 階連續地可微分的。則函數

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L f(\zeta)T(z;\ \zeta)d\sigma$$

在 L' 的裏面的任一弧線 L'' 上是 $m-1$ 階連續地可微分的。

祇要考究實 $f(\zeta)$ 的情況就夠了。函數 $\Phi(z)$ 是解析的，在區域 D 的

每一個單連通部分是正則的;在 L 上它的實部分與 $f(z)$ 相合。由 D 截出這樣一個單連通部分 D_1，使 L' 原屬於 D_1 的邊界。把 D_1 映射到圓上。則由圓的施窪而茨積分着手，容易求得 $\Phi(z)$ 在與弧線 L'' 相應的圓的弧線上是 $m-1$ 階可微分的。現在，爲了證明定理 1，祇要利用，由於定理的條件，實現映射 D_1 到圓上的函數線 L'' 是 $m-1$ 階連續地可微分的，這一已知事實就夠了。

定理 2. 令法線 ν 與 ξ 軸間的角是連續的並對於 σ 在全部境界 L 上有 m 階微商。則有下面的正確公式:

$$\frac{1}{4\pi}T(z;\,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta-z}+P(z;\,\zeta)d\sigma, \tag{27}$$

其中函數 $P(z;\,\zeta)$，若把對數的奇點除去，直到境界是連續的並在境界上對於 z 是 $m-2$ 階可微分的。

函數 $M(z;\,\zeta)+\ln(\zeta-z)$，當被看作變數 z 的函數時，在 D 的裏面沒有奇點;它的實部分是單值的，並在 L 上是與 $\ln|(\zeta-z)|$ 相合。應用公式(17)到這函數上是可能的，它給出

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \ln|\zeta-t|\,T(z;\,t)d\sigma_t=$$

$$=M(z;\,\zeta)+\ln(\zeta-z)+iH(a;\zeta)-i\arg(\zeta-a)。$$

在公式中 z 及 ζ 是 D 裏面的點，t 是境界 L 的點。因爲 $H(a;\,\zeta)\equiv 0$，故

$$M(z;\,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_L \ln|\zeta-t|\,T(z;\,t)d\sigma_t-\ln(\zeta-z)+i\arg(\zeta-a)。$$

對經過 ζ 點的法線 ν_ζ 微分此等式，固定 ζ 於境界，並利用單層對數勢的法向微商的定理，我們得

$$T(z;\,\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\partial \ln|\zeta-t|}{\partial\nu_\zeta}T(z;t)d\sigma_t-\frac{2}{\zeta-z}\frac{\partial\zeta}{\partial\nu_\zeta}+2i\frac{\partial\arg(\zeta-a)}{\partial\nu_\zeta}。$$

再者，

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu_t}=\cos(\nu_t,\zeta)+i\cos(\nu_t,\eta=\cos(\sigma,\eta)-i\cos(\sigma,\xi)=-i\frac{d\zeta}{d\sigma},$$

並,若設

$$P(z;\zeta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_L\frac{\partial\ln|\zeta-t|}{\partial\nu_t}T(z;t)d\sigma_t+\frac{i}{2\pi}\frac{\partial\arg(\zeta-a)}{\partial\nu_t},$$

我們引到公式(27)。餘下要證明的是:$P(z;\zeta)$在$D+L$中是$m-2$階對z連續地可微分的。但是這可由定理1立刻地得到,因爲,由於定理2的條件,函數$\frac{\partial\ln|\zeta-t|}{\partial\nu_t}$沿境界$L$對$\sigma$是$m-1$階連續地可微分的。

定理3. 恆等式

$$g(\zeta)=h(\zeta),\tag{28}$$

其中ζ是境界L的一點,並函數$g(\zeta)$與$h(\zeta)$是連續的,是與下面一組恆等式等價的:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_L g(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_L h(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma,\\ \frac{1}{4\pi}\int_L \overline{g(\zeta)}T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_L \overline{h(\zeta)}T(z;\zeta)d\sigma。\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

須證明的是(28)從(29)得出。(29)的兩等式相加並將所有項移到左邊,我們得

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \operatorname{Re}\{g(\zeta)-h(\zeta)\}T(z;\zeta)d\sigma\equiv 0。$$

這積分的實部分是在D中調和的函數,在L上與$\operatorname{Re}\{g(\zeta)-h(\zeta)\}$相合。由此接着得$\operatorname{Re}\{g(\zeta)-h(\zeta)\}=0$。全然同樣可證明$\operatorname{Im}\{g(\zeta)-$
$-h(\zeta)\}=0$。

§42. 第一與第三問題到積分方程的歸結 在§40中已經建立:第一與第三雙調和問題歸結到下面一個複變數函數理論的邊界問題。

求滿足下面條件的解析函數$\varphi(z)$與$\psi(z)$:

(1)在區域 D 的裏面 $\varphi(z)$ 與 $\psi(z)$ 沒有奇點；

(2)在 D 中 $\varphi'(z)$ 是單值的；

(3)在區域 D 的境界線 L 上有下面等式成立：

$$\varkappa\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=g(\zeta), \tag{1}$$

其中 $\varkappa$ 爲常數，而 $g(\zeta)$ 是已給的境界上點的連續與單值的函數。我們將設這函數是足夠地平滑。

在第一問題中

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu};\quad g(\zeta)=2\mu(u_x+iu_y),$$

在第三問題中必須設

$$\varkappa=-1,\quad g(\zeta)=-f(\zeta)-b_k。$$

我們將設區域 D 是有限的。

讓我們進到我們所表述的邊界問題的解。

把區域 D 保角映射到某區域 D^* 上是常常有用的。令 $z=\omega(t)$ 是實現這映射的函數。讓我們表記

$$\varphi(\omega(t))=\Phi(t),\quad \psi(\omega(t))=\Psi(t)。$$

再者，令 $\zeta=\omega(\tau)$ 及 $G(t)=g(\omega(t))$。任務歸結到 $\Phi(t)$ 及 $\Psi(t)$ 的計算，它們必須在區域 D^* 的境界 γ 上滿足邊界條件

$$\varkappa\Phi(\tau)-\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\Phi'(\tau)}-\overline{\Psi(\tau)}=G(\tau)。\tag{1_1}$$

注意 $\Phi'(t)$ 在 D^* 中是單值的。由此接着得函數 $\varkappa\Phi(t)-\overline{\Psi(t)}$ 在 D^* 中也是單值的。

事實上，從 $\Phi'(t)$ 及 $G(t)$ 的單值性接着得在境界上 $\varkappa\Phi(t)-\overline{\Psi(t)}$ 是單值的。由此知這函數在 $\Phi(t)$ 及 $\Psi(t)$ 沒有奇點的區域內也是單價的。

根據 § 41 的定理 3 等式(1_1)是與下面兩個等式等價的：

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\left\{\varkappa\Phi(\tau)-\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\Phi'(\tau)}-\overline{\Psi(\tau)}\right\}T(t,\ \tau)d\sigma=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}G(\tau)T(t,\ \tau)d\sigma, \tag{2}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\left\{\varkappa\overline{\Phi(\tau)}-\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\Phi'(\tau)-\Psi(\tau)\right\}T(t,\ \tau)d\sigma=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\overline{G(\tau)}\,T(t,\ \tau)d\sigma。 \tag{3}$$

這裏 γ 是區域 D^* 的境界；$T(t,\ \tau)$是這區域的施瓦而茨核。

等式(2)及(3)能簡化。設

$$\Phi(t)=p+iq,\quad \Psi(t)=p_1+iq_1。$$

調和函數 $\varkappa p-p_1=\mathrm{Re}\{\varkappa\Phi(t)-\overline{\Psi(t)}\}$ 及 $\varkappa q+q_1=\mathrm{Im}\{\varkappa\Phi(t)-\overline{\Psi(t)}\}$ 在 D^* 中是單值的。公式(17)及(17_1) § 41 能用到它們上。因爲

$$\varkappa p-p_1=\mathrm{Re}\{\varkappa\Phi(t)-\Psi(t)\},\quad \varkappa q+q_1=\mathrm{Im}\{\varkappa\Phi(t)+\Psi(t)\},$$

故，依照已指出的公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}(\varkappa p-p_1)T(t,\ \tau)d\sigma=\varkappa\Phi(t)-\Psi(t)-i[\varkappa q(a)-q_1(a)],$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}(\varkappa q-q_1)T(t,\ \tau)d\sigma=\frac{1}{i}[\varkappa\Phi(t)+\Psi(t)]-\frac{1}{i}[\varkappa p(a)+p_1(a)]。$$

用 i 乘第二個等式。以此與第一個等式相加及相減，我們得：

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}[\varkappa\Phi(\tau)-\overline{\Psi(\tau)}]T(t,\ \tau)d\sigma=\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{2}[\varkappa\Phi(a)+\overline{\Psi(a)}],$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}[\varkappa\overline{\Phi(\tau)}-\Psi(\tau)]T(t,\ \tau)d\sigma=-\Psi(t)+\frac{1}{2}[\varkappa\overline{\Phi(a)}+\Psi(a)]。$$

因 $\Phi(t)$ 及 $\Psi(t)$ 除差一常數外是完全確定的，於是我們可設

$$\varkappa\Phi(a)+\overline{\Psi(a)}=0。$$

現在我們把上式代入等式(2)及等式(3)，爲簡便起見，並規定：

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}G(\tau)T(t,\ \tau)d\sigma=A(t),\ \frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\overline{G(\tau)}T(t,\ \tau)d\sigma=-B(t), \tag{4}$$

我們就得到:

$$\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\Phi'(\tau)}T(t,\tau)d\sigma=A(t), \tag{5}$$

$$\Psi(t)+\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\Phi'(\tau)T(t,\tau)d\sigma=B(t)。 \tag{6}$$

若已知 $\Phi'(\tau)$,等式(6)立刻確定 $\Psi(t)$。所以轉看方程(5)。將這方程重新寫出如下式樣:

$$\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\overline{\Phi'(\tau)}d\sigma-$$

$$-\frac{\omega(t)}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)d\sigma=A(t)。 \tag{7}$$

函數 $\frac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$ 在 D^* 中是正則的,且依照 § 41 的(23)有

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)d\sigma=\frac{1}{2}\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\omega'(a)}。$$

將這代入(7)並對 t 微分,我們得

$$\varkappa\Phi'(t)-\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right]\overline{\Phi'(\tau)}d\sigma-$$

$$-\frac{1}{2}\omega'(t)\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\omega'(a)}=A'(t)。 \tag{8}$$

讓我們由方程

$$l-\frac{1}{2\varkappa}\bar{l}=\frac{1}{2\varkappa}\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\omega'(a)} \tag{9}$$

來確定常數 l 並設

$$\Phi'(t)=\vartheta(t)+l\,\omega'(t)。 \tag{10}$$

將這代入(8),我們得新未知函數 $\vartheta(t)$ 的方程:

$$\varkappa\vartheta(t)-\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma=A'(t)。 \tag{11}$$

我們將設境界線 γ 是充分平滑的。則 $A(t)$ 及 $\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}\times$ $\times T(t,\tau)\Big]$ 直到境界是連續的。令 t 趨向境界的某點 τ_0。在(11)中取此極限，我們得積分方程

$$\vartheta(\tau_0)-\frac{1}{4\pi\varkappa}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial \tau_0}\Big[\frac{\omega(\tau)-\omega(\tau_0)}{\omega'(\tau)}T(\tau_0,\tau)\Big]\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{\varkappa}A'(\tau_0), \tag{12}$$

在這式裏未知數是在 D^* 中正則的函數 $\vartheta(\tau_0)$ 的境界數值。

方程(12)能簡化。爲此可利用 § 41 的公式(14)，由它容易看出

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\Big]=K(t,\tau)-\frac{\omega'(t)}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k(\tau)\ln(t-t_k),$$

其中 $K(t;\tau)$ 是在 D^* 中正則的 t 的函數，t_k 是 γ_k 裏面的點，γ_k 是 L_k 的像。再者，函數 $\frac{\vartheta(t)}{\omega'(t)}$ 是在 D^* 中正則的且，依照 § 41 的公式(21)，

$$\int_\gamma a_k(\tau)\frac{\overline{\vartheta(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\sigma=0,\quad k=1,2,\cdots,n。$$

現在對 $\vartheta(\tau)$ 得方程

$$\vartheta(\tau_0)-\frac{1}{\varkappa}\int_\gamma K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma=\frac{1}{\varkappa}A'(\tau_0)。 \tag{13}$$

積分方程(13)不是弗列德和蒙式的，因爲積分中有 $\overline{\vartheta(\tau)}$ 而不是 $\vartheta(\tau)$。但是，若把實部分與虛部分分開並認 $\operatorname{Re}\{\vartheta(\tau)\}$ 及 $\operatorname{Im}\{\vartheta(\tau)\}$ 爲未知，這方程能引至一組弗列德和蒙型的兩方程。由此知弗列德和蒙交比定理是可以應用到方程(13)的。

§ 43. 積分方程的研究　首先注意 § 42 中方程(13)的右邊部分在 D^* 中是單值的。事實上，由於 § 41 的公式(14)，

$$A'(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}G(\tau)\frac{\partial T(t,\tau)}{\partial t}d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}G(\tau)\frac{\partial^2 M_0(t,\tau)}{\partial\nu\partial t}d\sigma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{G(\tau)}{(\tau-t)^2}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t-t_k}\int_{\gamma}a_k(\tau)G(\tau)d\tau,$$

且在右邊的所有三項都是在 D^* 中單值及正則的。

現在設 § 42 的方程(13)已解出且 $\vartheta(\tau)$ 的境界數值已確定。於是同一方程給出 $\vartheta(t)$在區域裏的解析拓展

$$\vartheta(t)=\frac{1}{\varkappa}A'(t)+\frac{1}{\varkappa}\int_{\gamma}K(t,\tau)\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma。$$

現在讓我們確定在 § 42 的公式(9)中的常數 l。在 § 42 的(10)中設 $t=a$ 並取該式的共軛式。則我們得 $\overline{\Phi'(a)}=\overline{\vartheta(a)}+\bar{l}\,\overline{\omega'(a)}$。將此代入 § 42 的公式(9)中,我們得爲確定 l 的方程:

$$\varkappa l-\bar{l}=\frac{1}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}。\tag{1}$$

在第一問題中 $\varkappa>1$, 且由(1)確定的 l 是單值的。在第三問題中 $\varkappa=-1$,且方程(1)演成下式:

$$l+\bar{l}=-\frac{1}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\overline{\omega'(a)}}。\tag{2}$$

爲了在第三問題中常數 l 可以確定,必須且僅須的是$\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$的數值是實數。若這條件被滿足,則

$$\mathrm{Re}(l)=-\frac{1}{4}\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)},\tag{2_1}$$

l 的虛部分留下來是隨意的。函數 $\Phi'(t)$確定得準到形式爲 $i\alpha\omega'(t)$的不定項,其 α 爲實常數。

得到 $\Phi'(t)$,我們依照 § 42 的公式(5)及(6)求得 $\Phi(t)$ 及 $\Psi(t)$, 並容易驗證這兩函數給出我們的問題的解。

$\dfrac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$必須是實數的條件是與下式等價的❶：

$$\int_L f_1dx+f_2dy=0。\tag{3}$$

試證明這點。在第三問題中

$$\varkappa=-1,\quad g(\zeta)=-(f_1+if_2),$$

且 § 42 的方程(12)取下面形式：

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(\tau_0)+\int_L K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma=\lim_{t\to\tau_0}\frac{1}{4\pi}\int_\gamma F(\tau)\frac{\partial T(t,\tau)}{\partial t}d\sigma,\\ F(\tau)=f_1+if_2。\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

讓我們解一個附帶的問題：求解析函數 $R(t)$ 及 $S(t)$，它們在 D^* 中沒有奇點，具有單值的 $R'(t)$，在 γ 上滿足等式

$$R(\tau)+\frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{R'(\tau)}+\overline{S(\tau)}=F(\tau)+\frac{\omega(\tau)}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}。\tag{5}$$

按照 § 42 的等式(1)的辦法同樣來處理這些等式，我們求得

$$S(t)+\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}R'(\tau)T(t,\tau)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\overline{F(\tau)}T(t,\tau)d\sigma+\frac{\overline{\omega(a)}}{4}\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)},\tag{6}$$

$$R(t)+\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{R'(\tau)}T(t,\tau)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\gamma F(\tau)T(t,\tau)d\sigma-\frac{\omega(a)}{4}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}+\frac{\omega(t)}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)},\tag{7}$$

$$R'(t)+\int_\gamma K(t,\tau)\overline{R'(\tau)}d\sigma+\frac{\omega'(t)}{2}\frac{\overline{R'(a)}}{\omega'(a)}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\gamma F(\tau)\frac{\partial T(t,\tau)}{\partial t}d\sigma+\frac{\omega'(t)}{2}\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}。\tag{8}$$

---

❶ 在問題 II 中等式(3)指出施於境界線 L 的合外力矩是等於零。見[28a]。

比較(8)與(4),我們看出方程(8)滿足 $R'(t)=\vartheta(t)$。這樣確定 $R'(t)$,我們由方程(6)及(7)求得 $R(t)$及 $S(t)$。

這樣,附帶的問題的解便有了。現在表記 $R(t)=r(z)$, $S(t)=s(z)$,其 $z=\omega(t)$。再者,設

$$s(z)=t'(z),\quad \mathrm{Re}\{\bar{z}\,r(z)+t(z)\}=w^*。$$

則等式(5)取下面形式[見 § 40 的公式(2)]

$$\frac{\partial w^*}{\partial x}+i\frac{\partial w^*}{\partial y}=f_1+if_2+\frac{1}{2}z\ \frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}。$$

用 $d\bar{z}$ 乘這式,對 L 積分,並取所得等式兩邊的實部分。則我們得

$$\int_L dw^*=\int_L f_1dx+f_2dy-\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}\right)\int_L(y\,dx-x\,dy)。$$

但,顯然,左邊的積分等於零,而右邊的第二個積分是區域 D 的面積 S 的二倍。因此

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\vartheta(a)}}{\omega'(a)}\right)=\frac{1}{S}\int_L f_1\,dx+f_2\,dy,$$

所以我們的本題已得到證明。

這節的所有考究是根據 § 42 的積分方程 (13) 是可解的這一個假定。試證明這假定是正確的,即不管它的右邊部分是什麼,這方程是可解的。

在 § 42 的末了曾寫過弗列德和蒙交比定理是可應用到 § 42 的方程(13)上。所以我們祇要證明相對應的齊次方程有唯一解 $\vartheta(\tau)\equiv 0$ 就夠了。

設 $g(\zeta)\equiv 0$。則 $A'(t)\equiv 0$,且 § 42 的方程 (13) 成為齊次的。令 $\vartheta_0(\tau)$是它的任一解。

讓我們注意,因為條件(3)顯然為 $f_1+if_2\equiv 0$ 所滿足,在第三問題(當 $\varkappa=-1$)中 $\frac{\vartheta(a)}{\omega'(a)}$ 的數值將是實的。依照我們已知的 $\vartheta_0(\tau)$ 我們求得解出具有零的邊界條件的第一或第三問題的相應函數 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$。

利用唯一性定理，容易求出在第一問題中 $\varphi_0'(z)\equiv 0$ 並在第三問題中 $\varphi_0'(z)=Ci$（C 是一個實常數）。在這兩情況中 § 42 的公式（9）及（10）皆給 $\vartheta_0(z)\equiv 0$。§ 42 的積分方程（13）的可解性已得到證明。

解出第三雙調和問題後，我們也能解第二問題，即已給出施於境界上的外力的彈性理論的問題。我們將在下面用一些例子來示出這是怎樣作出的。

在無限區域的情況中的彈性理論問題也由類似的方法解出。在 § 46 中我們將用一個例子來示出在這裏上述的方法怎樣遭到改變。這裏我們僅注意到若區域 D 是無限的，條件（3）不是必要的。

§ 44. 單連通區域的情況 試闡明在當區域 D 是單連通的情況中，§ 42 的積分方程（13）怎樣改變。令函數 $z=\omega(t)$ 使 $|t|<1$ 的圓保角映射到區域 D 上。又設 $\zeta=\omega(\tau)$。$|t|<1$ 圓的施瓦而茨核，如已知道了的，是

$$T(t,\tau)=\frac{\tau+t}{\tau-t}。\tag{1}$$

§ 42 的方程（5）取下面的式樣：

$$\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\Phi'(\tau)}\frac{\tau+t}{\tau-t}d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_\gamma G(\tau)\frac{\tau+t}{\tau-t}d\sigma。$$

注意在圓周 γ 上 $d\sigma=\dfrac{d\tau}{i\tau}$，我們容易化這方程成下式樣：

$$\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau-t}d\tau+C'=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{G(\tau)}{\tau-t}d\tau+C'',\tag{2}$$

其中 C' 及 C'' 是不變的，等於

$$C'=\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\Phi'(\tau)}d\sigma,\quad C''=-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma G(\tau)d\sigma。$$

在方程（2）的左邊部分中積分的分子中加上 $\omega(t)$ 然後減去 $\omega(t)$。則我們得

$$\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-t)}\overline{\Phi'(\tau)}\,d\tau-\frac{\omega(t)}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-t}+C'=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{G(\tau)}{\tau-t}d\tau+C''。\quad (3)$$

再者,依照 § 41 的公式(23)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\tau+t}{\tau-t}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}},$$

且方程(3)取下一形式:

$$\varkappa\Phi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau)-\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-\tau)}\overline{\Phi'(\tau)}\,d\tau-\frac{\omega(t)\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}+C'=$$

$$=A(t)+C''。\quad (4)$$

這次我們表記了

$$A(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}G(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

微分(4)並,如在 § 43 中,設

$$\Phi'(t)=\vartheta(t)+l\,\omega'(t),$$

其中 l 由等式
$$l=\frac{1}{\varkappa}\frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}$$
確定。我們就得到方程

$$\vartheta(t)-\frac{1}{2\pi i\varkappa}\int_{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(t)-\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-t)}\right]\overline{\vartheta(\tau)}d\tau=A'(t)。\quad (5)$$

在這等式中若 t 是境界的點,$A'(t)$ 是這函數的境界值,則它就是未知函數 $\vartheta(t)$的積分方程。這方程爲 H. И. 穆斯黑里施維利所得到的。

讓我們注意穆斯黑里施維利方程的一個重要的奇性。若映射函數 $\omega(t)$是有理的,則方程(3)的核是退化的。事實上,令 $\omega(t)=\frac{p(t)}{q(t)}$,其中 $p(t)$ 及 $q(t)$是多項式。則

$$\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\tau-t}=\frac{p(\tau)\,q(t)-p(t)\,q(\tau)}{(\tau-t)\,q(t)\,q(\tau)}。$$

在 $\tau=t$ 時分子化成零,所以是可用 $\tau-t$ 除盡的。這相除的商是一個 t 及 τ 的多項式。我們把它寫成下形式

$$\frac{p(\tau)\,q(t)-p(t)\,q(\tau)}{\tau-t}=\sum_{k=1}^{N} t^k q_k(\tau)。$$

現在方程(3)的核有下式樣

$$\frac{1}{\omega'(\tau)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(\tau)}{\tau-t}\right]=\sum_{k=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{q(t)}\right)\frac{q_k(\tau)}{q(\tau)\overline{\omega'(\tau)}},\qquad(6)$$

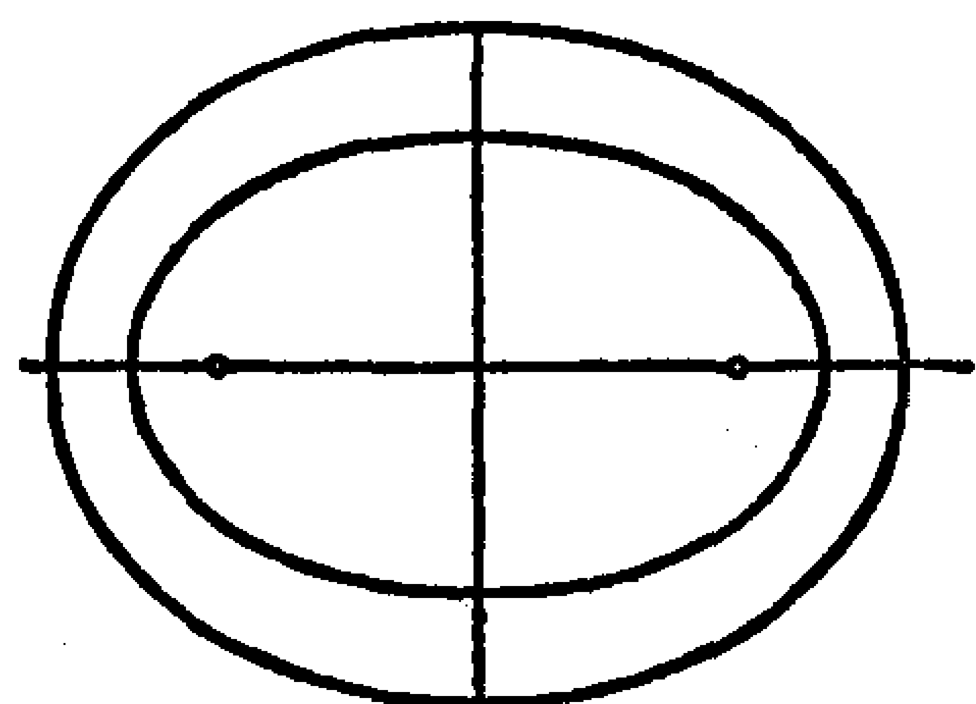
且顯然這核是退化的。現在,依照§4中的證明,方程(3)已得其有限形式的解。

這樣,我們得到穆斯黑里施利定理:若有理函數將圓映射到區域 D 上,則這區域的彈性理論的基本問題得其有限形式的解。

§45. 同焦點的橢圓環　試考究下兩同焦點橢圓所限定的一個環:

$$\frac{x^2}{a_0^2}+\frac{y^2}{a_0^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_1^2-c^2}=1,$$

設 $a_0>a_1$(圖9)。設環的境界上施有外力,其分佈是已知的。爲簡單起見,設施於每個橢圓上的外力的合向量各等於零。在這情況中高爾剎函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 在環中是單值的(§40)。


圖　9

依曲線積分外力的分力,我們得應力函數的微商的數值;這樣所確定的有不定常數項,這些項在 L_0 及 L_1 上各不相同。在 L_0 上試隨意地固定它們;在 L_1 上它們是暫不確定的。用 $f(\zeta)$ 表記

$$f(\zeta)=i\int(X_\nu+iY_\nu)ds$$

的數值。則高爾剎函數滿足境界式

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\psi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=\begin{cases} f(\zeta) & \text{在 } L_0 \text{ 上,} \\ f(\zeta)+C & \text{在 } L_1 \text{ 上。} \end{cases} \tag{1}$$

利用函數

$$z=\omega(t)=\frac{c}{2}\left(t\sqrt{\rho_0\rho_1}+\frac{1}{t\sqrt{\rho_0\rho_1}}\right), \tag{2}$$

其中 $$\rho_0=\frac{a_0+\sqrt{a_0^2-c^2}}{c}, \quad \rho_1=\frac{a_1+\sqrt{a_1^2-c^2}}{c}$$

得把同焦點橢圓環映射到兩個圓圈上。這樣 L_0 及 L_1 化成與之相應的兩圓周

$$\left.\begin{aligned} |t|&=\frac{1}{\sqrt{q}}, \\ |t|&=\sqrt{q}\,; \\ q&=\frac{\rho_1}{\rho_1}。 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

用 γ_0 及 γ_1 表記這兩圓圈的圓周。

現在表記

$$\zeta=\omega(\tau), \quad \varphi(\omega(t))=\Phi(t), \quad \psi(\omega(t))=\Psi(t),$$
$$f(\omega(t))=F(t)。$$

此外，用 B 表記在 γ_1 上等於零及在 γ_2 上等於 C 的數值。在(1)中換變數，得

$$\Phi(\tau)+\frac{\tau\sqrt{\rho_0\rho_1}+\dfrac{1}{\tau\sqrt{\rho_0\rho_1}}}{\sqrt{\rho_0\rho_1}-\dfrac{1}{\tau^2\sqrt{\rho_0\rho_1}}}\overline{\Phi'(\tau)}+\Psi(\tau)=F(\tau)+B。 \tag{4}$$

圓環的格臨複函數是已知的❶，即

❶ 見，例如[4]及[24]。在[4]中格臨複函數的式子有錯。

$$M(t,\tau)=-\frac{1}{4}\ln q+\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln|\tau|}{\ln q}\right)\ln t+\frac{1}{2}\ln\tau-\ln(\tau-t)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-q^{2n}\frac{t}{\tau}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-q^{2n}\frac{\tau}{t}\right)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-q^{2n-1}t\bar{\tau})+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{q^{2n-1}}{t\bar{\tau}}\right)-\alpha(\tau),\quad(5)$$

其中 $\alpha(\tau)$應這樣確定，它使圓環上某點 a 處 $M(t,\tau)$的虛部分變成零。

由(5)得出施窪而茨核的下面形式：

$$T(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln|\tau|}{\ln q}\right)\ln t-\frac{1}{\tau-t}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\ln\tau-\alpha(\tau)\right)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}\frac{t}{\tau}}\frac{t}{\tau^2}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}\frac{\tau}{t}}\frac{1}{t}\frac{\partial\tau}{\partial\nu}-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}t\bar{\tau}}t\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\nu}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{1-\frac{q^{2n-1}}{t\bar{\tau}}}\frac{1}{t\bar{\tau}^2}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\nu}。\quad(6)$$

注意，函數 $$\frac{1}{2}+\frac{\ln|\tau|}{\ln q}=b_1(\tau)$$

在環中是調和的，在外圓周上等於零，在內圓周上等於 1；它的法線微商依 § 41，用 $a_1(\tau)$來表記，它是與在環中任一正則函數成正交的。

公式(6)是可略加改變的。首先，

$$\frac{\partial\tau}{\partial\nu}d\sigma=i\,d\tau,\quad \frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\nu}d\sigma=-id\bar{\tau}。$$

現在在(6)中消去分母含有 $t-\tau$ 的各項。試考究在第三及第四和項中的第一項：

$$A=-\frac{q}{1-qt\bar{\tau}}t\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\nu}+\frac{q}{1-\frac{q}{t\bar{\tau}}}\frac{1}{t\bar{\tau}^2}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial\nu}=iq\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}\left(\frac{t}{1-qt\bar{\tau}}-\frac{1}{\bar{\tau}(t\bar{\tau}-q)}\right)。$$

在圓周 γ_1 上 $\bar{\tau}=\frac{q}{\tau}$，所以

$$A=-\frac{iq^2}{\tau^2}\frac{d\tau}{d\sigma}\left(\frac{t\tau}{\tau-q^2t}-\frac{\tau^2}{q^2(t-\tau)}\right)=-i\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{q^2t}{\tau(\tau-q^2t)}\right]\frac{d\tau}{d\sigma}。$$

正與此同樣我們求得，在 $\bar{\tau}=\dfrac{1}{q\tau}$ 的 γ_0 上

$$A=-i\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{t}{\tau(t-q^2\tau)}\right]\frac{d\tau}{d\sigma}。$$

引入函數 $p(t,\tau)$，設

$$p(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{iq^2t}{\tau(\tau-q^2t)} & \text{在 } \gamma_1 \text{ 上，}\\[2ex] \dfrac{iq^2t}{\tau(t-q^2\tau)} & \text{在 } \gamma_0 \text{ 上。}\end{cases}\tag{7}$$

則
$$A=\frac{1}{i(\tau-t)}\frac{d\tau}{d\sigma}+p(t,\tau)\frac{d\tau}{d\sigma}。$$

現在

$$\begin{aligned}T(t,\tau)&=a_1(\tau)\ln t+\frac{2}{i(\tau-t)}\frac{d\tau}{d\sigma}+p(t,\tau)\frac{d\tau}{d\sigma}+\\&+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}\ln\tau-\alpha(\tau)\right)-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{\tau-q^{2n}t}\frac{t}{\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{t-q^{2n}\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}+\\&+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t}{1-q^{2n+1}t\bar{\tau}}\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{\bar{\tau}(t\bar{\tau}-q^{2n+1})}\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}。\end{aligned}\tag{8}$$

現在試作出核 $K(t,\tau)$。我們有

$$\omega(\tau)-\omega(t)=\frac{c(\tau-t)}{2\sqrt{\rho_0\rho_1}}\frac{\rho_0\rho_1 t\tau-1}{t\tau}。$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right]&=-\frac{\omega'(t)}{\omega'(\tau)}a_1(\tau)\ln t+\\&+\frac{2}{i}\frac{\overline{\tau^2}}{t^2\tau(\rho_0\rho_1\overline{\tau^2}-1)}\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}+\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t^2\tau(\rho_0\rho_1\overline{\tau^2}-1)}a_1(\tau)+\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t\tau(\rho_0\rho_1 t\bar{\tau}-1)}p(t,\tau)\right]\frac{d\tau}{d\sigma}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t\tau(\rho_0\rho_1 \overline{\tau^2}-1)}\right]\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{1}{2}\ln\tau-\alpha(\tau)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t\tau(\rho_0\rho_1 \overline{\tau^2}-1)}\left[-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}t}{\tau(\tau-q^{2n}t)}\frac{d\tau}{d\sigma}+\right.\right.$$

$$+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{t-q^{2n}\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t}{1-q^{2n+1}t\bar{\tau}}\frac{d\bar{\tau}}{d\sigma}-$$

$$\left.\left.-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{\bar{\tau}(t\bar{\tau}-q^{2n+1})}\frac{f\bar{\tau}}{d\sigma}\right]\right\}$$

及

$$K(t,\tau)d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\frac{\overline{\tau^2}}{t^2\tau(\rho_0\rho_1\overline{\tau^2}-1)}d\bar{\tau}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t^2\tau(\rho_0\rho_1\overline{\tau^2}-1)}a_1(\tau)d\sigma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t\tau(\rho_0\rho_1\overline{\tau^2}-1)}\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{2}\ln\tau-\alpha(\tau)\right]+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\tau-t)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t\tau(\rho_0\rho_1 t\,\overline{\tau^2}-1)}p(t,\tau)\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{(t-\tau)(\rho_0\rho_1 t\tau-1)\overline{\tau^2}}{t\tau(\rho_0\rho_1\overline{\tau^2}-1)}\left[-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}t\,d\tau}{\tau(\tau-q^{2n}t)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}d\tau}{t-q^{2n}\tau}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}t\,d\bar{\tau}}{1-q^{2n+1}t\bar{\tau}}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n+1}d\bar{\tau}}{\bar{\tau}(t\bar{\tau}-q^{2n+1})}\right]\right\}。\quad(9)$$

試將 $K(t,\tau)$分解成 t 的勞潤級數。在這級數中保留有限的項數，我們近似地使核 $K(t,\tau)$退化。這樣我們得到我們的問題的近似解。

篇幅的不足使我們不能較詳盡地談論這一近似解。讓我們僅注意下一點。解積分方程式，我們得形式爲勞潤級數(若所代入的核(9)是退化的，這級數是有限的)的 $\Phi'(t)$。現在在公式(1)中試這樣地選定

常數 C，俾在 $\Phi'(t)$ 的式子中含有 $\frac{1}{t}$ 的項不復存在。這選擇使 $\Phi(t)$，所以也使 $\varphi(z)$ 將是單值的。這些就保證位移的單值性。

§ 46. 雙卵形線的外域　在本節中我們設立並解出從無限平面取去兩個拉得很長的卵形區域（圖 10）後所得的區域 D 的彈性理論的第二問題。

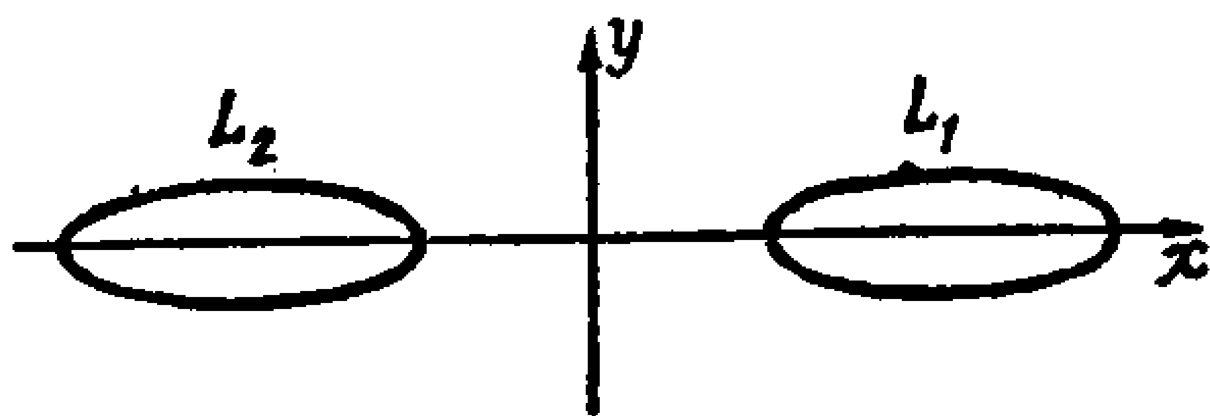


圖 10

爲簡單起見我們將設施於曲線 L_1 及 L_2 的每一個上的外力的合力等於零。則我們必須求在 L_1 及 L_2 外面是正則的且滿足邊界條件

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=\begin{cases} f(\zeta) & \text{在 } L_1 \text{ 上,} \\ f(\zeta)+C & \text{在 } L_2 \text{ 上} \end{cases} \tag{1}$$

的函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$。

關於卵形線 L_1 及 L_2 的形狀我們作下一假設，俾使我們的問題的解簡單化。

利用函數

$$t=\exp\left\{\frac{\pi b}{K'}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}\right\} \text{❶} \tag{2}$$

把沿着實軸的 $(-b, -a)$ 及 (a, b) 兩線段截得的平面映射到

$$\sqrt{q}<t<\frac{1}{\sqrt{q}}$$

的圓環上。在這裏已設

$$q=e^{-\frac{2\pi K}{K'}},\quad K=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$K'=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

❶ 見，例如，[24]。在這裏我們利用了 $\exp u=e^u$ 的符號。

與，最後，$k=\frac{a}{b}$，$k'=\sqrt{1-k^2}$。在卵形線的外面我們設想另兩曲線，(2)的映射使它們化成 $|t|=q_1^{-\frac{1}{2}}$ 及 $|t|=q_1^{\frac{1}{2}}$ 的兩圓周，其 q_1 是一個比 q 大且與 q 充分地接近的數字。函數(2)把區域 D 映射到

$$q_1^{\frac{1}{2}}\leqslant|t|\leqslant q_1^{-\frac{1}{2}}$$

的圓環上。

對 z 解方程(2)，我們得

$$z=\omega(t)=a\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{\pi}\ln t\right),$$

其中 sn 是雅可俾橢圓函數。在(1)中設 $\zeta=\omega(t)$ 並用通常符號，我們給予它與前節相同的界邊條件

$$\Phi(\tau)+\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\Phi'(\tau)}+\overline{\Psi(\tau)}=\begin{cases}F(\tau) & \text{在 } \gamma_1 \text{ 上},\\ F(\tau)+C & \text{在 } \gamma_2 \text{ 上};\end{cases} \qquad (3)$$

用 γ_1 及 γ_2 表記圓周 $|\tau|=q_1^{-\frac{1}{2}}$ 及 $|\tau|=q_1^{\frac{1}{2}}$。用通常方法我們得方程

$$\Phi(t)+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}\overline{\Phi'(\tau)}T(t,\tau)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma F(t)T(t,\tau)d\sigma+\frac{C}{4\pi}\int_{\gamma_2}T(t,\tau)d\sigma, \qquad (4)$$

$$\Psi(t)+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}\Phi'(\tau)T(t,\tau)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\overline{F(\tau)}T(t,\tau)d\sigma+\frac{\bar{C}}{4\pi}\int_{\gamma_2}T(t,\tau)d\sigma。 \qquad (5)$$

在這裏 Γ 表記圓環的全部境界。

與一般情況中一樣，若 $\Phi'(t)$ 是已知的，方程(5)直接地確定 $\Psi(t)$，則僅研究方程(4)就夠了。

現在注意下一點。因為區域 D 是無限的，函數 $z=\omega(t)$ 把環的裏面變到無窮遠(即 $\omega(-1)=\infty$)，所以在那裏 $\omega(t)$ 不是正則的。若我們

對方程(5)作與 § 42 中所利用的相同的變換，則計算的最後給到方程[見 § 42 的(11)]

$$\vartheta(t)+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma=A'(t)。\quad (6)$$

但是，解這式後，我們沒有解出我們的問題。事實上，由方程(6)確定境界值 $\vartheta(\tau)$ 後，我們利用這同一方程(6)解析拓展 $\vartheta(t)$ 到環的裏面。這樣，由於在積分裏有 $-\omega(t)$項的存在，一般地說，$\vartheta(t)$得出是在環中非正則的，所以就不適於解彈性理論的問題。

我們試用下法改變方程(4)。在其中令 $t=-1$ 並把所得結果由(4)減去。我們得下一方程：

$$\Phi(t)-\Phi(-1)+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\overline{\Phi'(\tau)}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}F(\tau)[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]d\sigma+$$

$$+\frac{C}{4\pi}\int_{\gamma_1}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]d\sigma。\quad (7)$$

在左邊的積分中的式子的分子裏我們試減去再加上 $\omega(t)$。注意

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\sigma=0。\quad (8)$$

事實上，函數$\dfrac{\Phi'(t)}{\omega'(t)}$在環中是正則的，且依照 § 41 的公式(23)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}T(t,\tau)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\sigma=\frac{1}{2}\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}。$$

這在環的裏面的任一 t 處是恆然正確的。特例地，在 $t=-1$ 處

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}T(-1,\tau)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\sigma=\frac{1}{2}\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}。$$

從前一等式減去這式，我們得等式(8)。

現在等式(7)取下一形式

$$\Phi(t)-\Phi(-1)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\overline{\Phi'(\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}F(\tau)[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]d\sigma+$$

$$+\frac{C}{4\pi}\int_{\gamma_2}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]d\sigma。$$

在這等式中左邊的積分的核在環中是正則的。對 t 微分，得：

$$\Phi'(t)+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}[T(t,\tau)-T(-1,\tau)]\right\}\overline{\Phi'(\tau)}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma}F(\tau)T(t,\tau)d\sigma+\frac{C}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{\gamma_2}T(t,\tau)d\sigma。\quad (9)$$

圓環的施瓦茨核 $T(t,\tau)$ 是用 §45 的公式（8）來確定的，在這公式裏僅須以 q_1 代替 q。

也同有限區域的情況一樣，在（9）的左邊可能從積分裏棄去含有函數

$$a_1(\tau)\ln t=\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln|\tau|}{\ln q_1}\right)\ln t$$

的一項。我們試用 $K(t,\tau)$ 表記核的餘下部分。現在我們來到未知函數爲 $\Phi'(t)$ 的方程：

$$\Phi'(t)+\int_{\Gamma}K(t,\tau)\overline{\Phi'(\tau)}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma}F(\tau)T(t,\tau)d\sigma+\frac{C}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_{\gamma_2}T(t,\tau)d\sigma,\quad (10)$$

它的核作爲 t 的函數在 Γ 裏面是正則的。

試表記 $$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}F(\tau)T(t,\tau)d\sigma=A(t)。$$

在(10)的右邊的第二個積分可簡單地計算。事實上，積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} T(t, \tau)d\sigma$$

是一個在 Γ 裏面解析的函數,它的實部分在 γ_2 上等於一,在 γ_1 上等於零。函數

$$\frac{\ln t}{\ln q_1}+\frac{1}{2}$$

滿足這些條件,且上一積分與此僅能有一純虛常數的差別,即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} T(t, \tau)d\sigma=\frac{\ln t}{\ln q_1}+\frac{1}{2}+i\alpha。\tag{11}$$

試將此代入(10)。設 τ_0 爲在 Γ 上的一點。令 $t\to\tau_0$, 我們得積分方程

$$\Phi'(\tau_0)+\int_{\Gamma} K(\tau_0, \tau)\overline{\Phi'(\tau_0)}d\sigma=A'(\tau_0)+\frac{C}{2\tau_0\ln q_1}。\tag{12}$$

也同有限區域的情況一樣,可能證明方程(12)永是可解的。解這方程後,這樣地選定 C 俾使函數 $\Phi'(t)$的勞潤級數中沒有含有 $\frac{1}{t}$ 的一項。則 $\Phi(t)$在環中將是單値的,而我們的問題就已解出了。

爲了實際解方程(12),可能分解 $K(t, \tau)$成勞潤級數並在這級數中保留有限的項數。在論文[24]及[25]中,方程(12)是在 q 及 q_1 是很小的情況俾能略去它們的大於一的羃時得到解出。在這兩論文中, $f(\zeta)$ 在性質上當作函數

$$f(\zeta)=\frac{h}{2}[(1+n)\zeta+(1-n)\overline{\zeta}],\tag{13}$$

其中 h 及 n 是常數。在兩條礦脈上地的壓力問題便歸於這一情況。

試簡短地引出這一解。在這裏我們將不詳細地作出計算,而大部分僅給出它們的結果。首先,在 Γ 裏面 $\omega(t)$分解成級數

$$\omega(t)=\frac{\pi b}{K'}\left[-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{q^m}{1+q^m}\left(t^m-\frac{1}{t^m}\right)\right]=$$

$$=-\frac{\pi b}{K'(t+1)}+\omega_0(t)。\tag{14}$$

再者，在(13)中設 $\zeta=\omega(\tau)$，我們得

$$F(\tau)=\frac{h}{2}(1+n)\omega(\tau)+\frac{h}{2}(1-n)\overline{\omega(\tau)}$$

及
$$A(t)=\frac{h}{2}(1+n)\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\omega_0(\tau)T(t,\tau)d\sigma+$$
$$+\frac{h}{2}(1-n)\cdot\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\overline{\omega_0(\tau)}T(t,\tau)d\sigma-$$
$$-\frac{bh}{8K'}\left\{(1+n)\int_{\Gamma}\frac{1}{1+\tau}T(t,\tau)d\sigma+(1-n)\int_{\Gamma}\frac{1}{1+\bar{\tau}}T(t,\tau)d\sigma\right\}。\quad(15)$$

函數 $\omega_0(t)$ 在 Γ 裏面是正則的，且在(15)中的首兩積分可根據§41的公式(22)及(23)立刻得到。另兩積分的計算是複雜的。作出這些計算並僅保留較低次項，我們得(12)的右邊部分的式子

$$A'(t)+\frac{C}{2t\ln q_1}=-\frac{h\pi b}{2K'}\Big\{[(1+n)q+(1-n)q_1]+$$
$$+[(1+n)q+(1-n)q_1]\frac{1}{t^2}-2[(1+n)q^2+(1-n)q_1^2]t-$$
$$-2[(1+n)q^2+(1-n)q_1^2]\frac{1}{t^3}+3[(1+n)q^3+(1-n)q_1^3]t^2+$$
$$+3[(1+n)q^3+(1-n)q_1^3]\frac{1}{t^4}+\frac{1-C_0}{t\ln q_1}\Big\};\quad C_0=\frac{CK'}{h\pi b}。\qquad(16)$$

在核 $K(t,\tau)$ 中僅保留低次項，我們用具有退化核的方程代替(12)：

$$\Phi'(\tau_0)+\frac{ib}{4K'}\int_{\Gamma}\left(\frac{2q}{\tau+1}+\frac{q_1^2}{\tau(\tau+1)}\right)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\tau-$$
$$-\frac{ib}{4K'}\int_{\gamma_1}\frac{q_1^2}{\tau^2(\tau+1)}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\tau-\frac{ib}{4K'\tau_0\ln q_1}\int_{\Gamma}\Big(\frac{1}{\tau+1}-\frac{1}{2}+q\tau-$$
$$-\frac{q}{\tau}-q^2\tau^2+\frac{q^2}{\tau^2}+q^3\tau^3-\frac{q^3}{\tau^3}\Big)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\tau\,\overline{\omega'(\tau)}}d\sigma-\frac{ib}{4K'\tau_0^2}\int_{\Gamma}\Big(\frac{2q(1-q)}{\tau(\tau+1)}-$$
$$-\frac{2q^2(1-q)}{\tau^2(\tau+1)}+\frac{2q^3}{\tau^3(\tau+1)}+\frac{qq_1^2}{\tau^2}+\frac{q_1^2\tau}{\tau+1}\Big)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}d\tau+$$

$$+\frac{ib}{4K'\tau_0^2}\int_{\gamma_2}\frac{qq_1^2}{\tau^2}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)}d\tau+\frac{ib}{4K'\tau_0^3}\int_\Gamma\left(\frac{4q^2(1-q)}{\tau(\tau+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{4q^3}{\tau^2(\tau+1)}\right)\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)}d\tau-\frac{ib}{4K'\tau_0^4}\int_\Gamma\frac{6q^3}{\tau(\tau+1)}\frac{\overline{\Phi'(\tau)}}{\omega'(\tau)}d\tau=$$

$$=B(\tau_0)。\quad (17)$$

爲了簡短起見我們用了 $B(\tau_0)$表記(16)的數値。從方程(17)顯而易見

$$\Phi'(\tau_0)=B(\tau_0)+D_0+\frac{D_1}{\tau_0}+\frac{D_2}{\tau_0^2}+\frac{D_3}{\tau_0^3}+\frac{D_4}{\tau_0^4}。\quad (18)$$

將此式代入(17)並比較相同 τ_0 冪的係數後，我們得到一組具有未知數 $D_0, \cdots, D_4$ 的五個方程。在它們之外尙須加入第六個方程

$$D_1-\frac{h\pi b}{2K'\ln q_1}(1-C_0)=0,$$

它表達出 $\Phi'(t)$不含有具有$\frac{1}{t}$的一項的這一事實。

解這組方程後，我們求得

$$D_0=D_2=D_3=D_4=0,$$

$$D_1=\frac{h\pi^4 b^2 q}{4aK'(1+k)q_1\ln q_1}[(1+n)q+(1-n)q_1],$$

$$C_0=1-\frac{\pi^3 bq[(1+n)q+(1-n)q_1]}{2aK'^2(1+k)q_1}。$$

因此，方程(12)的近似解將是:

$$\Phi'(t)=-\frac{h\pi b}{2K'}\left\{[(1+n)q+(1-n)q_1]\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-\right.$$

$$-2[(1+n)q^2+(1-n)q_1^2]\left(t+\frac{1}{t^3}\right)+$$

$$\left.+3[(1+n)q^3+(1-n)q_1^3]\left(t^2+\frac{1}{t^4}\right)\right\}。$$

§ 47. 關於逐次追近級數的收斂性 我們已注意到，§ 42的積分方

程(13)是與兩個弗列德和蒙型方程組等價的。爲了建立這方程組，我們設

$$\left.\begin{array}{c}\vartheta(\tau)=p(\tau)+iq(\tau),\ K(\tau_0,\ \tau)=R(\tau_0,\ \tau)+iS(\tau_0,\ \tau),\\ \frac{1}{\varkappa}A'(\tau)=A_1(\tau)+iA_2(\tau);\quad \frac{1}{\varkappa}=\lambda。\end{array}\right\}\qquad(1)$$

現在將 § 42 的(13)中的實與虛兩部分分開，我們得這所指的一組爲

$$\left.\begin{array}{l}p(\tau_0)-\lambda\int_\gamma\{R(\tau_0,\ \tau)p(\tau)+S(\tau_0,\ \tau)q(\tau)\}d\sigma=A_1(\tau_0),\\ q(\tau_0)-\lambda\int_\gamma\{S(\tau_0,\ \tau)p(\tau)-R(\tau_0,\ \tau)q(\tau)\}d\sigma=A_2(\tau_0)。\end{array}\right\}\qquad(2)$$

關於方程組(2)我們試證明下一定理[1]。

定理 1. 方程組(2)的特徵值全是實的，且其絕對值是大於一。

弗列頓交比定理使我們能用下一表述來代替定理 1 中的提示。我們也將證明這一表述。

若 λ 或是一複數，或是一絕對值不大於一的實數，則齊次方程組

$$\left.\begin{array}{l}p(\tau_0)-\lambda\int_\gamma[R(\tau_0,\ \tau)p(\tau)+S(\tau_0,\ \tau)q(\tau)]d\sigma=0,\\ q(\tau_0)-\lambda\int_\gamma[S(\tau_0,\ \tau)p(\tau)-R(\tau_0,\ \tau)q(\tau)]d\sigma=0\end{array}\right\}\qquad(3)$$

僅有恆等於零的解 $p(\tau)\equiv0$, $q(\tau)\equiv0$。

試先考究實 λ 的情況。則 $|\lambda|\leqslant1$。用 i 乘(3)的第二個方程，再與第一個相加。仍表記 $p(\tau)+iq(\tau)=\vartheta(\tau)$。則

$$\vartheta(\tau_0)-\lambda\int_\gamma K(\tau_0,\ \tau)\overline{\vartheta(\tau)}d\sigma=0。\qquad(4)$$

能夠提出的有下列各種可能性。

(a) $0<\lambda<1$。方程(2)則解答在境界上無位移並係數 $\varkappa=\frac{1}{\lambda}$ 的第

[1] 對於單連通區域的情況這定理已被 Д. И. Шерман [37e] 所證明；這證明也能簡單地移到複連通區域的情況。

一雙調和問題。依照§43中的證明，方程(4)及與其相隨的方程組(3)僅有恆等於零的解。

(б) $\lambda=-1$。方程(4)解答所求雙調和函數的微商在境界上的數值是零的第三雙調和問題，且這方程也僅有恆等於零的解。

(в) 若$-1<\lambda<0$ 或 $\lambda=1$，設 $\lambda=-\lambda^*$，$\vartheta(\tau)=i\vartheta^*(\tau)$。方程(4)，在去掉 i 後，變成下式

$$\vartheta^*(\tau_0)-\lambda^*\int_\gamma K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta^*(\tau)}d\sigma=0。\tag{5}$$

在這裏或者 $0<\lambda^*<1$，或者 $\lambda^*=-1$。由於(a)及(б)所述，方程(5)僅有恆等於零解 $\vartheta^*(\tau)=0$。但則 $\vartheta(\tau)\equiv 0$，$p(\tau)=q(\tau)\equiv 0$。

現在令 λ 是複數：$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ 並 $\lambda_2\neq 0$。滿足方程組(3)的函數 $p(\tau)$ 及 $q(\tau)$，在這情況中，一般地講，也將成爲複數。設 $p(\tau)=p_1(\tau)+$ $+ip_2(\tau)$，$q(\tau)=q_1(\tau)+iq_2(\tau)$。在(3)中實虛兩部分分開後，我們給了這組四個積分方程：

$$\left.\begin{aligned}
&p_1(\tau_0)-\lambda_1\int_\gamma[R(\tau_0,\tau)p_1(\tau)+S(\tau_0,\tau)q_1(\tau)]d\sigma+\\
&\qquad+\lambda_2\int_\gamma[R(\tau_0,\tau)p_2(\tau)+S(\tau_0,\tau)q_2(\tau)]d\sigma=0,\\
&p_2(\tau_0)-\lambda_2\int_\gamma[R(\tau_0,\tau)p_1(\tau)+S(\tau_0,\tau)q_1(\tau)]d\sigma-\\
&\qquad-\lambda_1\int_\gamma[R(\tau_0,\tau)p_2(\tau)+S(\tau_0,\tau)q_2(\tau)]d\sigma=0,\\
&q_1(\tau_0)-\lambda_1\int_\gamma[S(\tau_0,\tau)p_1(\tau)-R(\tau_0,\tau)q_1(\tau)]d\sigma+\\
&\qquad+\lambda_2\int_\gamma[S(\tau_0,\tau)p_2(\tau)-R(\tau_0,\tau)q_2(\tau)]d\sigma=0,\\
&q_2(\tau_0)-\lambda_2\int_\gamma[S(\tau_0,\tau)p_1(\tau)-R(\tau_0,\tau)q_1(\tau)]d\sigma-\\
&\qquad-\lambda_1\int_\gamma[S(\tau_0,\tau)p_2(\tau)-R(\tau_0,\tau)q_2(\tau)]d\sigma=0。
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

我們用 i 乘這組中的第三及第四方程，並分別與第一及第二方程相加。現在引入

$$p_1(\tau)+iq_1(\tau)=\vartheta_1(\tau),\quad p_2(\tau)+iq_2(\tau)=\vartheta_2(\tau)$$

的表記，我們得

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_1(\tau_0)-\lambda_1\int_\gamma K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta_1(\tau)}d\sigma+\lambda_2\int_\gamma K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta_2(\tau)}d\sigma=0,\\&\vartheta_2(\tau_0)-\lambda_2\int_\gamma K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta_1(\tau)}d\sigma-\lambda_1\int_\gamma K(\tau_0,\tau)\overline{\vartheta_2(\tau)}d\sigma=0。\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

試較詳盡地研究方程組(7)。核 $K(t,\tau)$在區域 D^* 中是正則的；由此知滿足方程組(7)的函數 $\vartheta_1(\tau_0)$ 及 $\vartheta_2(\tau_0)$是在 D^* 裏面可解析拓展並在這區域中是正則的。但是在這情況中它們是與 $a_k(\tau)$正交的。

回憶公式(§ 42)

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right]=K(t,\tau)-\frac{\omega'(t)}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k(\tau)\ln(t-t_k),$$

我們相信

$$\int_\gamma K(t,\tau)\overline{\vartheta_j(\tau)}d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right]\overline{\vartheta_j(\tau)}d\sigma,$$

$$j=1,2。$$

將此代入(7)中我們利用所得等式解析拓展到區域 D^* 裏面的點 t：

$$\vartheta_1(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right][\lambda_1\overline{\vartheta_1(\tau)}-\lambda_2\overline{\vartheta_2(\tau)}]d\sigma=0,$$

$$\vartheta_2(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)\right][\lambda_2\overline{\vartheta_1(\tau)}+\lambda_1\overline{\vartheta_2(\tau)}]d\sigma=0。$$

試用 $\theta_1(t)$ 及 $\theta_2(t)$表記 $\vartheta_1(t)$ 及 $\vartheta_2(t)$的不定積分。試對 t 積分上兩等式。適當地選定任意常數使 $\theta_1(t)$ 及 $\theta_2(t)$恰如定義所規定的，我們得

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)[\lambda_1\overline{\theta_1'(\tau)}-\lambda_2\overline{\theta_2'(\tau)}]d\sigma=0,\\&\theta_2(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)[\lambda_2\overline{\theta_1'(\tau)}+\lambda_1\overline{\theta_2'(\tau)}]d\sigma=0。\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

上兩式可能簡化。事實上,依照 § 41 的公式(23)

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\lambda_1\overline{\theta_1'(\tau)}-\lambda_2\overline{\theta_2'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}T(t,\tau)d\sigma=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1\overline{\theta_1'(a)}-\lambda_2\overline{\theta_2'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\lambda_2\overline{\theta_1'(\tau)}+\lambda_1\overline{\theta_2'(\tau)}}{\overline{\omega'(\tau)}}T(t,\tau)d\sigma=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_2\overline{\theta_1'(a)}+\lambda_1\overline{\theta_2'(a)}}{\overline{\omega'(a)}}。 \quad (10)$$

試用 k_1 及 k_2 表記(9)及(10)的右邊部分的常數。現在方程(8)可能寫成:

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}T(t,\tau)[\lambda_1\overline{\theta_1'(\tau)}-\lambda_2\overline{\theta_2'(\tau)}]d\sigma+k_1\,\omega(t)=0,\\&\theta_2(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}T(t,\tau)[\lambda_2\overline{\theta_1'(\tau)}+\lambda_1\overline{\theta_2'(\tau)}]d\sigma+k_2\,\omega(t)=0。\end{aligned}\right\}(11)$$

試設 $\omega(a)=0$。這可僅由 t 平面中原點的選擇來確定。現在試利用公式

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_1(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)[\lambda_1\theta_1'(\tau)-\lambda_2\theta_2'(\tau)]d\sigma=0,\\&\Psi_2(t)-\frac{1}{4\pi}\int_\gamma \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)}T(t,\tau)[\lambda_2\theta_1'(\tau)+\lambda_1\theta_2'(\tau)]d\sigma=0\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

來確定兩個新的解析函數 $\Psi_1(t)$ 及 $\Psi_2(t)$。立刻地可能證明函數 $\theta_1(t)+$ $+\overline{\Psi_1(t)}$ 及 $\theta_2(t)+\overline{\Psi_2(t)}$ 在 D^* 中是單值的。再者,從(11)及(12)接着得在 γ 上實現等式

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1(\tau)-\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}[\lambda_1\overline{\theta_1'(\tau)}-\lambda_2\overline{\theta_2'(\tau)}]+\overline{\Psi_1(\tau)}+k_1\omega(\tau)=0,\\&\theta_2(\tau)-\frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}}[\lambda_2\overline{\theta_1'(\tau)}+\lambda_1\overline{\theta_2'(\tau)}]+\overline{\Psi_2(\tau)}+k_2\,\omega(\tau)=0。\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

應用 § 41 的定理 3 於等式(13)的每一個後,就可能立刻相信這點。則我們得到(11)及(12)兩關係。

設

$$\theta_j(t)=\Phi_j(t)+a_j\omega(t),\quad j=1,2, \quad (14)$$

並這樣地選擇 a_1 及 a_2 俾使(13)中含有 $\omega(t)$ 的各項消去。爲此 a_1 及 a_2 必須滿足下方程組

$$\left.\begin{aligned} a_1-\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+k_1=0,\\ a_2-\lambda_2\bar{a}_1-\lambda_1\bar{a}_2+k_2=0 。\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

不難證驗，當 $\lambda_2\neq 0$ 時這組方程是可解的。

回到變數 z，設 $\omega(t)=z$ 及 $\omega(\tau)=\zeta$。表記

$$\Phi_j(t)=\varphi_j(z),\quad \Psi_j(t)=\psi_j(z)。$$

現在等式(13)取下形式

$$\varphi_1(\zeta)-\zeta[\lambda_1\overline{\varphi_1'(\zeta)}-\lambda_2\overline{\varphi_2'(\zeta)}]+\overline{\psi_1(\zeta)}=0,$$
$$\varphi_2(\zeta)-\zeta[\lambda_2\overline{\varphi_1'(\zeta)}+\lambda_1\overline{\varphi_2'(\zeta)}]+\overline{\psi_2(\zeta)}=0 。$$

上兩等式相加與相減，我們得

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(\zeta)-(\lambda_1+\lambda_2)\zeta\,\overline{\varphi_1'(\zeta)}+\overline{\psi_1(\zeta)}=\\ &\qquad=-\varphi_2(\zeta)+(\lambda_1-\lambda_2)\zeta\,\overline{\varphi_2'(\zeta)}-\overline{\psi_2(\zeta)},\\ &\varphi_1(\zeta)-(\lambda_1-\lambda_2)\zeta\,\overline{\varphi_1'(\zeta)}+\overline{\psi_1(\zeta)}=\\ &\qquad=\varphi_2(\zeta)-(\lambda_1+\lambda_2)\zeta\,\overline{\varphi_2'(\zeta)}+\overline{\psi_2(\zeta)} 。\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

等式(16)在境界 L 上生效。

試引入考究在區域 D 中爲關係式

$$u_1^1+i\,v_1^1=\varphi_1(z)-(\lambda_1+\lambda_2)z\,\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)},$$
$$u_2^1+i\,v_2^1=\varphi_1(z)-(\lambda_1-\lambda_2)z\,\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)},$$
$$u_1^2+i\,v_1^2=-\varphi_2(z)+(\lambda_1-\lambda_2)z\,\overline{\varphi_2'(z)}-\overline{\psi_2(z)},$$
$$u_2^2+i\,v_2^2=\varphi_2(z)-(\lambda_1+\lambda_2)z\,\overline{\varphi_2'(z)}+\overline{\psi_2(z)}$$

所確定的實函數 $u_1^1(x, y)$, $v_1^1(x, y)$, $\cdots$, $v_2^2(x, y)$。

用這些表記等式(16)寫成：

在 L 上

$$u_1^1+i\,v_1^1=u_1^2+i\,v_1^2;\quad u_2^1+i\,v_2^1=u_2^2+iv_2^2 。\tag{17}$$

再引入表記

$$\varphi_1(z)=p^1+iq^1,\quad \varphi_2(z)=p^2+iq^2。$$

不難建立下面諸等式的正確性:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1^1}{\partial x}+\frac{\partial v_1^1}{\partial y}=\ \ 2(1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial p^1}{\partial x};\ \frac{\partial v_1^1}{\partial x}-\frac{\partial u_1^1}{\partial y}=\ \ 2(1+\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial q^1}{\partial x},\\
&\frac{\partial u_2^1}{\partial x}+\frac{\partial v_2^1}{\partial y}=\ \ 2(1-\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial p^1}{\partial y};\ \frac{\partial v_2^1}{\partial x}-\frac{\partial u_2^1}{\partial y}=\ \ 2(1+\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial q^1}{\partial y},\\
&\frac{\partial u_1^2}{\partial x}+\frac{\partial v_1^2}{\partial y}=-2(1-\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial p^2}{\partial x};\ \frac{\partial v_1^2}{\partial x}-\frac{\partial u_1^2}{\partial y}=-2(1+\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial q^2}{\partial x},\\
&\frac{\partial u_2^2}{\partial x}+\frac{\partial v_2^2}{\partial y}=\ \ 2(1-\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial p^2}{\partial y};\ \frac{\partial v_2^2}{\partial x}-\frac{\partial u_2^2}{\partial y}=\ \ 2(1+\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial q^2}{\partial y},
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

由(17)顯然得出下面諸等式的正確性:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_1^1+\frac{\partial q^1}{\partial x}v_1^1\right)dy+\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_1^1-\frac{\partial q^1}{\partial x}u_1^1\right)dx\right]=\\
&\qquad=\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_1^2+\frac{\partial q^1}{\partial x}v_1^2\right)dy+\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_1^2-\frac{\partial q^1}{\partial x}u_1^2\right)dx\right],\\
&\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_1^1+\frac{\partial q^2}{\partial x}v_1^1\right)dy+\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_1^1-\frac{\partial q^2}{\partial x}u_1^1\right)dx\right]=\\
&\qquad=\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_1^2+\frac{\partial q^2}{\partial x}v_1^2\right)dy+\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_1^2-\frac{\partial q^2}{\partial x}u_1^2\right)dx\right],\\
&\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_2^1+\frac{\partial q^1}{\partial x}v_2^1\right)dy+\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_2^1-\frac{\partial q^1}{\partial x}u_2^1\right)dx\right]=\\
&\qquad=\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}u_2^2+\frac{\partial q^1}{\partial x}v_2^2\right)dy+\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}v_2^2-\frac{\partial p^1}{\partial x}u_2^2\right)dx\right],\\
&\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_2^1+\frac{\partial q^2}{\partial x}v_2^1\right)dy+\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_2^1-\frac{\partial q^2}{\partial x}u_2^1\right)dx\right]=\\
&\qquad=\int_L\left[-\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}u_2^2+\frac{\partial q^2}{\partial x}v_2^2\right)dy+\left(\frac{\partial p^2}{\partial x}v_2^2-\frac{\partial q^2}{\partial x}u_2^2\right)dx\right]。
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

將(19)中的積分依照格臨公式變成重積分。引入表記

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial p^j}{\partial x}\right)^2dx\,dy=A_j,\quad \iint\limits_D\left(\frac{\partial q^j}{\partial x}\right)^2dx\,dy=B_j\quad j=1,2,\qquad(20)$$

$$\iint\limits_D\frac{\partial p^1}{\partial x}\,\frac{\partial p^2}{\partial x}dx\,dy=A_{12},\iint\limits_D\frac{\partial q^1}{\partial x}\,\frac{\partial q^2}{\partial x}dx\,dy=B_{12}。\qquad(21)$$

利用恆等式(18)及函數 p^j 及 q^j 的柯西-黎曼方程，我們由(19)得：

$$(1+\lambda_1+\lambda_2)A_1+(1-\lambda_1-\lambda_2)B_1=$$
$$=-(1+\lambda_1-\lambda_2)A_{12}-(1-\lambda_1+\lambda_2)B_{12},$$
$$(1+\lambda_1-\lambda_2)A_1+(1-\lambda_1+\lambda_2)B_1=$$
$$=(1+\lambda_1+\lambda_2)A_{12}+(1-\lambda_1-\lambda_2)B_{12},$$
$$(1+\lambda_1+\lambda_2)A_2+(1-\lambda_1-\lambda_2)B_2=$$
$$=(1+\lambda_1-\lambda_2)A_{12}+(1-\lambda_1+\lambda_2)B_{12},$$
$$(1+\lambda_1-\lambda_2)A_2+(1-\lambda_1+\lambda_2)B_2=$$
$$=-(1+\lambda_1+\lambda_2)A_{12}-(1-\lambda_1-\lambda_2)B_{12}。$$

由此消去 A_{12} 及 B_{12}，我們得

$$2\lambda_2(A_1+A_2)=0, \quad 2\lambda_2(B_1+B_2)=0 。$$

因爲 A_j 及 B_j 皆不是負的，且 $\lambda_2\neq 0$，故

$$A_1=A_2=B_1=B_2=0 。$$

但是在這情況中
$$\frac{\partial p^1}{\partial x}=\frac{\partial p^2}{\partial x}=\frac{\partial q^1}{\partial x}=\frac{\partial q^2}{\partial x}\equiv 0 。$$

所以
$$\varphi_1'(z)=\varphi_2'(z)\equiv 0 。$$

又過到變數 t, $z=\omega(t)$，我們求得

$$\Phi_1'(t)=\Phi_2'(t)\equiv 0,$$

或
$$\theta_1'(t)+a_1\,\omega'(t)\equiv 0, \quad \theta_2'(t)+a_2\omega'(t)\equiv 0 。$$

由此確定 k_1 及 k_2 [公式(9)及(10)]並將它們代入(15)後，我們求得$a_1=a_2=0$。所以，$\theta_1'(t)=\theta_2'(t)\equiv 0$。現在回憶

$$\theta_j'(t)=\vartheta_j(t)=p_j+iq_j,$$

我們相信 $p_1=p_2=q_1=q_2\equiv 0$，且方程組(3)在複 λ 的情況中僅有恆等於零的解。定理1已完全得到證明。

定理2. §42的方程(13)的逐次迫近級數是收斂的。

§42的方程(13)中的參數 λ 是實數，且其絕對值是不超過1的。這方程在 λ 是實數時是與圓 $|\lambda|\leqslant 1$ 的所有各點都非特徵的方程組(3)

等價的。§ 42 的方程組(13)的解在這圓裏依 λ 冪展開成泰樂爾級數。這就等於說：方程組(3)的，也就是 § 42 的方程(13)的，逐次迫近級數是收斂的。

接着注意，實際上逐次迫近方法的應用是麻煩的，它須計算大量的積分。

第三章　廣義的施窪而茨交替法

§ 48. 平面上複連通區域的狄銳希勒問題　設 D 是複連通平面區域，我們首先假定這個區域是有限的。如前，我們用 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 記作構成它的境界的閉曲線，且 L_0 表示限制 D 的最外面的一條閉曲線。此外，用 D_0 記作在 L_0 的內部的區域，而 D_k 記作在 L_k 外部的區域，$k=1, 2, \cdots, n$。D 顯然是 $D_0, D_1, \cdots, D_n$ 的公共部分。

設 $U(x, y)$ 是在 D 內的調和函數，而 $V(x, y)$ 是它的共軛函數。記爲 $U(x, y)+iV(x, y)=\varphi(z)$。在 § 31 中指出 $\varphi(z)$ 可能表作下形式

$$\varphi(z)=\varphi^*(z)+\sum_{k=1}^{n} A_k \ln(z-z_k), \tag{1}$$

其中 $\varphi^*(z)$ 是在 D 內的正則函數，A_k 是實係數，且 z_k 是在 L_k 的內部的定點。

我們將證明 $\varphi^*(z)$ 可能表作函數的和的形式，和中每一函數在 D_k 內是正則的。在 D 內取任意一點 z。在 D 內引閉曲線 $L_0', L_1', \cdots, L_n'$，令它們分別和曲線 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 充分接近，使得點 z 在曲線 $L_0', L_1', \cdots, L_n'$ 所限制的區域的內部(圖 11)。用 L' 記 $L_0', L_1', \cdots, L_n'$ 沿正方向的總和。現在，由柯西公式，

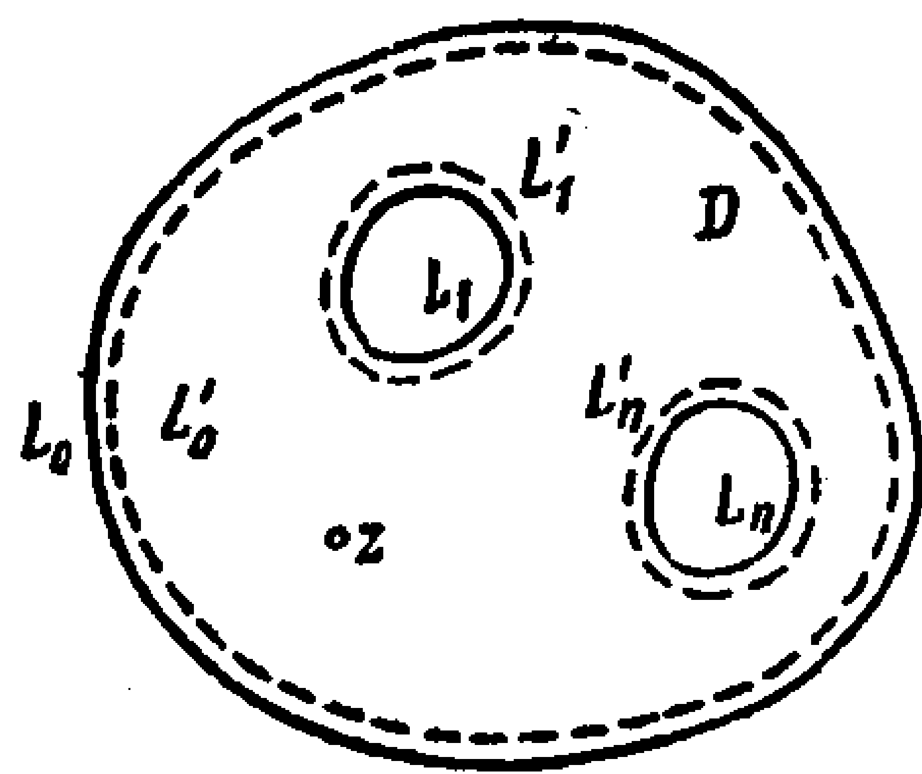


圖 11

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n}\int_{L_k'}\frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta。 \tag{2}$$

函數

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k'}\frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \quad k=0,1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

在 $L_0'(k=0)$ 的內部或在 $L_k'(k=1,2,\cdots,n)$ 的外部是正則的。但曲線

L_k' 可能與 L_k 任意地接近。由此推知 $\varphi_k(z)(k=0,1,2,\cdots,n)$ 在全部區域 D_k 內。可以解析拓展的。因

$$\varphi^*(z)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(z), \tag{4}$$

於是證明了我們的斷言。記

$$U_k(x,y)=\mathrm{Re}\{\varphi_k(z)\}。$$

則從(1)及(4)得出在 D 內的調和函數的表達式

$$U(x,y)=\sum_{k=0}^{n}U_k(x,y)+\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|z-z_k|, \tag{5}$$

其中 $U_k(x,y)$ 是在 D_k 內的調和函數。在公式(5)中的函數 $U_k(x,y)$ 不是唯一決定的；事實上，對每一函數可能增加一個常數 a_k，只須

$$a_0+a_1+\cdots+a_k=0 。$$

現在假如我們能比較簡單地解決每一區域 D_k 的狄銳希勒問題。我們指出，對於解區域 D 的狄銳希勒問題，也比較簡單地歸結到解某一積分方程組。

用 $u_k(\zeta)$ 記函數 $U_k(x,y)$ 在境界 L_k 上的值。我們取值 $u_k(\zeta)$ 作爲我們的問題的未知函數。對於區域 D_k 的狄銳希勒問題的解既然是已知的，則我們認爲在這些區域內的格臨函數 $G_k(z;\zeta)$ 是已知的。在其時，有

$$U_k(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}u_k(\zeta)\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}d\sigma 。 \tag{6}$$

設 $f_k(\zeta)$ 是需要求的函數 $U(x,y)$ 在曲線 L_k 上的值。在方程(5)下面的 $z=x+iy$ 了解作是曲線 L_m 上的點。在這條曲線上 $U(x,y)=$ $=f_m(z)$，$U_m(x,y)=u_m(z)$，而 $U_k(x,y)$ 在其它曲線上的值由(6)式決定之。現在公式(5)給出：

在 L_m 上，
$$u_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}u_k(\zeta)\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}d\sigma=$$
$$=f_m(z)-\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|z-z_k|。 \tag{7}$$

等式(7)形成有未知函數$u_k(\zeta)$, $k=0,1,2,\cdots,n$的弗列德和蒙型的積分方程組。係數A_k暫認爲是任意的。

若方程組(7)的右端是任意已給值，則這方程組沒有解。爲了確信這個事實，只須證明它的對應齊次方程組：

在L_m上，

$$u_m(z)+\sum_{k\neq m}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}u_k(\zeta)\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}d\sigma=0 \tag{8}$$

有不恆等於零的解。注意恆等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}d\sigma\equiv 1, \tag{9}$$

它意味着在境界上等於1的調和函數恆等於1。從(9)立即顯出齊次方程組(8)有解$u_m(z)=\alpha_m$，此處α_m是常數，這些常數的和等於零。

不難改變方程組(7)使它是可解的。設函數$l_k(\zeta)$滿足下條件

$$\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}l_k(\zeta)d\sigma=1, \tag{10}$$

而在其餘的情況它是任意的。將方程組(7)代作下形式：

在L_m上，

$$u_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}u_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{d\nu}-l_k(\zeta)\right]d\sigma=$$
$$=f_m(z)-\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|z-z_k|。 \tag{11}$$

現在證明方程組(11)不論它的右端如何是可解的。按照弗列德和蒙交比定理來考慮齊次方程組：

在L_m上，

$$v_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}v_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}-l_k(\zeta)\right]d\sigma=0。 \tag{12}$$

設$v_0(z), v_1(z), \cdots, v_n(z)$是這方程組的某一組解。用$a_m$記下面的常數

$$a_m=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}v_k(\zeta)l_k(\zeta)d\sigma。$$

由於這個記號，方程組(12)有下形式

在 L_m 上，

$$v_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}\frac{\partial G_k}{\partial\nu}v_k(\zeta)d\sigma=a_m。 \tag{13}$$

藉助於方程組(12)所確定的在曲線 L_m 上的值 $v_m(z)$，將認爲是在 D_m 內爲調和的函數在境界上的值。我們記這個函數爲 $V_m(z)$。因區域 D_m 是單連通的，故 $V_m(z)$ 的共軛函數在 D_m 內顯然是單值的。作下函數

$$V(z)=\sum_{m=0}^{n}V_m(z)。$$

這個函數在 D 內是調和的；它的共軛函數在 D 內是單值的。(13)式指出函數 $V(z)$ 在每一條曲線 L_m 上的值是常數而等於 a_m。從這樣出發，我們證明 $V(z)=$常數。

引進所考慮的函數 $b_m(z)$ 及 $a_m(z)$[閱 § 41，公式(10)—(12)]。還要令 $b_0(z)\equiv1$。不難見到

$$V(z)=a_0b_0(z)+\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_0)b_k(z)。 \tag{14}$$

由 $V(z)$ 的單值性構成應滿足的恆等式的條件

$$\int_L V(\zeta)a_k(\zeta)d\sigma=0,\quad k=1,2,\cdots,n。 \tag{15}$$

應指出恆等式(15)當 $k=0$ 時也是正確的，因爲當 $b_0(\zeta)\equiv1$ 時，$a_0(\zeta)\equiv0$。現在對於(15)式當 $k=0$ 時乘以 a_0，且當 $k>0$ 時乘以 a_k-a_0，然後將所得諸等式相加。應用(14)式，我們得到

$$\int_L V(\zeta)\frac{\partial V(\zeta)}{\partial\nu}d\sigma=0。$$

但在位勢理論中指出若 $V(z)$ 在 D 內是調和的，則(ν 是向外法線)

$$\int_L V\frac{\partial V}{\partial\nu}d\sigma=\iint_D\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy。$$

因之，有 $$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad V(z)=\text{常數}。$$

現在不難確信函數 $V_m(z)$ 也是常數。事實上，

$$V_m(z)=V(z)-\sum_{k\neq m}V_k(z)。$$

因 $V(z)$ 是一個常數，則右端的一切項都是在 L_m 的內部的調和函數，因之 $V_m(z)$ 在 L_m 的內部是調和函數。但由定義 $V_m(z)$ 在 L_m 的外部是調和的。這樣一來，顯出 $V_m(z)$ 在全平面上是調和的。由劉維爾定理 (теорема Лиувилля)，$V_m(z)=$常數。

現在在(12)式中以常數代 $v_m(z)$。應用關係式(9)及(10)，我們立卽得到 $v_k(z)\equiv 0$。於是方程組(11)有解。

現在指出用這個方程組能夠解狄銳希勒問題。解方程組(11)，第一步用 $f_m(z)$ 代替它的自由項，然後用 $\ln|z-z_k|$ 來代替。用 $W_m(z)$ 及 $W_{km}(z)$ 表示對應的解。於是方程組(11)的解是

$$U_m(z)=W_m(z)-\sum_{k=1}^{n}A_kW_{km}(z)。$$

到現在爲止，常數 A_k 仍然是沒有確定的，但要求下面的和

$$A=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}U_k(\zeta)l_k(\zeta)d\sigma$$

對於所有值 $m=0,1,2,\cdots,n$ 給出同一值。這就給出含有 $n+1$ 個未知數 $A, A_1, \cdots, A_n$ 的 $(n+1)$ 個方程。求出這些未知數，我們得到下形式的狄銳希勒問題的解

$$U(z)=\sum_{k=0}^{n}U_k(z)+\sum_{k=1}^{n}A_k\ln|z-z_k|-A。\tag{16}$$

對於解變態的狄銳希勒問題將大大地簡化。在這情況 $A_k=0$ 及 $U=\sum_{k=0}^{n}U_k(z)$。函數 $U_k(z)$ 可從下面方程組來確定:

在 L_m 上

$$U_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}U_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}-l_k(\zeta)\right]d\sigma=f_m(z)。\tag{17}$$

按照所提出的問題，必須從 $f_m(z)$ 減去下值

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}U_k(\zeta)l_k(\zeta)d\sigma$$

得到所給的常數。

§49. **三維區域的情況** 相同方法可應用到解空間的狄銳希勒問題，且形式可大大地簡化。設對於一區域 D 提出這個問題，而 D 的境界是由幾個不同曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 所構成。記 D_m 爲以 S_m 爲境界且包含區域 D 在其內的一個區域。在 D 內爲調和的函數 $U(M)$❶可表爲在 D_m 內爲調和的諸函數之和。這可立即由格臨公式得出，我們可將這公式表作下形式

$$U(M)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=1}^{n}\iint_{S_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\nu}-U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right)dS=\sum_{m=1}^{n}U_m(M), \quad (1)$$

且下面函數

$$U_m(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\nu}-U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right)dS \quad (2)$$

顯然在 D_m 內是調和的。

$U(M)$ 的下面表達式

$$U(M)=\sum_{m=1}^{n}U_m(M) \quad (3)$$

是唯一的。爲了證明這個事實，設還有另一個表達式

$$U(M)=\sum_{m=1}^{n}U'_m(M),$$

此處 $U'_m(M)$ 爲在 D_m 內的調和函數。從(3)減去這個式子，且爲簡單起見記 $U_m-U'_m=V_m$，我們得到

$$\sum_{m=1}^{n}V_m=0。$$

將這個式子再寫爲下形式

$$V_m=-\sum_{k\neq m}V_k。$$

這個等式的左端是在 S_m 外部爲調和的函數，而其右端是在 S_m 的

❶ 此處用 M 記空間的變點。

內部爲調和的函數。但在這情況 $V_m(M)$ 是在全部空間內的調和函數，因之它必等於零。這就證明了表達式(3)的唯一性。

記所求的函數 $U(M)$ 在曲面 S_m 上的已知值爲 $f_m(M)$。設對於每一區域 D_m 的狄銳希勒問題已能求其解，且設 $G_m(M, M_1)$ 爲區域 D_m 的格臨函數。如前節的同樣討論，我們不難引出下面積分方程組：

$$U_m(M)+\frac{1}{4\pi}\sum_{k\neq m}\iint_{S_k} U_k(M_1)\frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu}\,dS=f_m(M), \quad (4)$$

$$m=1, 2, \cdots, n。$$

與平面問題不同之處，就是方程組(4)總是有解的。事實上，設 $v_1(M), v_2(M), \cdots, v_n(M)$ 滿足下齊次方程組

$$v_m(M)+\frac{1}{4\pi}\sum_{k\neq m}\iint_{S_k} v_k(M)\frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu}\,dS=0。\quad (5)$$

記 $V_m(M)$ 爲在 D_m 內的調和函數，而它在 S_m 上等於 $v_m(M)$。

比較方程組(5)及(4)，我們看到下函數

$$V(M)=\sum_{m=1}^{n} V_m(M)$$

在 D 內是調和的，且在它的境界上等於零。於是 $V(M)\equiv 0$，且因表達式(3)的唯一性，則 $V_m(M)\equiv 0$。這樣一來，齊次方程組(5)僅有恆等於零的解；由於弗列德和蒙交比定理，方程組(4)恆有解，而從這組解顯然可得出在區域 D 內的狄銳希勒問題的解。

§ 50. **廣義的施瓦而茨交替法** 我們回到平面問題(§ 48)。爲簡單起見，設區域 D 是無限的，因此境界 L_0 不存在。我們選取 $l_k(\zeta)$ 爲下函數

$$l_k(\zeta)=\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu}\bigg|_{z=\infty}, \quad (1)$$

因此方程組(17)有下形式：

在 L_m 上，

$$u_m(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k} u_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu}-\frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu}\right]dS=f_m(z),$$

$$m=1, 2, \cdots, n。\tag{2}$$

設曲線 L_k 相互間可充分離開。於是我們不難見到方程組(2)的核將很小,且顯然(參閱 §2)可用逐次迫近法以解方程組(2)。

關於方程組(2)的逐次迫近交替法我們將詳盡地加以分析。為了這個目的我們作如下的處理。在方程(2)中引用參數 λ。我們得到新方程:

在 L_m 上,

$$u_m(z)+\frac{\lambda}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k}u_k(\zeta)\left(\frac{\partial G_k(z,\zeta)}{\partial\nu}-\frac{\partial G_k(\infty,\zeta)}{\partial\nu}\right]d\sigma=f_m(z),$$

$$m=1, 2, 3, \cdots, n。\tag{3}$$

將它的解作為下形式

$$u_m(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\lambda^r u_{mr}(z)\tag{4}$$

以求之。將這個解代入(3)。使左邊及右邊的 λ 次數相同的係數相等,我們得到下面的遞推公式:

$$\left.\begin{aligned}&u_{m0}(z)=f_m(z),\\&u_{mr}(z)=\sum_{k\neq m}\frac{1}{2\pi}\int_{L_k}u_{k,\,r-1}(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z,\zeta)}{\partial\nu}-\frac{\partial G_k(\infty,\zeta)}{\partial\nu}\right]d\sigma。\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

現在在(4)中令 $\lambda=1$,我們得到方程組(2)的解。

公式(5)僅在曲線 L_m 上確定函數 $u_{mr}(z)$。現在設 z 表示區域 D_m 的任何一點。我們用記號 $U_{mr}(z)$ 表示在 D_m 內的調和函數,而它在這區域的境界上的值是由(5)式所確定。顯然,在 D_m 的內部,有

$$U_{mr}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_m}u_{mr}(\zeta)\frac{\partial G_m(z,\zeta)}{\partial\nu}\,d\sigma,$$

且公式(5)可表為這樣形式:

在 L_m 上,
$$\left.\begin{aligned}&U_{m0}(z)=f_m(z),\\&U_{mr}(z)=\sum_{k\neq m}[U_{k,r-1}(z)-U_{k,r-1}(\infty)]。\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

如公式(6)所指出,級數(4)中的項可如下構成之。

我們把在 D_m 內的調和函數 $U_{m0}(z)$ 作爲零次近似解,且這個函數在境界上的值是已知值 $f_m(z)$。

若函數 $U_{m0}(z), \cdots, U_{m,r-1}(z)$ 已構造好了,則 $U_{mr}(z)$ 可如下決定之:從函數 $U_{k,r-1}(z)$, $k \neq m$, 減去它在無窮遠的值,計算所得差在曲線 L_m 上的值,然後對於不等於 m 的所有 k 取這些值的和。這個結果就是 $U_{mr}(z)$ 在境界 L_m 上的值,再應用相關的格臨函數,我們得到在所有區域 D_m 內的函數 $U_{mr}(z)$。所需求在 D 內的調和函數 $U(z)$ 等於下級數的和:

$$U(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\sum_{m=1}^{n}U_{mr}(z)。\qquad (7)$$

我們敍述的步驟是和施窪而茨交替法的意義相似的;我們將稱這個方法爲廣義的施窪而茨交替法。

當 D 是雙連通區域的情況,則廣義的施窪而茨交替法將顯得特別簡單。我們可認爲 $f_2(\zeta)\equiv 0$。爲了可以這樣作,祇須從所求函數 $U(z)$ 減去在 D_2 內爲調和且在 L_2 上等於 $f_2(z)$ 的函數 $U'(z)$。現在公式(6)給出:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在 } L_1 \text{ 上,} & \\ U_{10}(z)=f(z), & U_{1r}(z)=U_{2,r-1}(z)-U_{2,r-1}(\infty), \\ \text{在 } L_2 \text{ 上,} & \\ U_{20}(z)=0, & U_{2r}(z)=U_{1,r-1}(z)-U_{1,r-1}(\infty)。\end{array}\right\} \qquad (8)$$

從(8)式,則當 r 是奇數時 $U_{1r}(z)$ 恆等於零,且當 r 是偶數時 $U_{2r}(z)$ 恆等於零。爲簡單起見,現在記

$$U_{1r}(z)=U_r(z), \quad U_{2r}(z)=V_r(z)。$$

於是有

$$U(z)=U_0(z)-V_1(z)+U_2(z)-V_3(z)+\cdots \qquad (9)$$

在有限複連通區域的情況,無須重大的改變就可以應用廣義的施窪而茨交替法。祇須將函數 $l_0(\zeta)$ 代以零。也可以取

$$l_0(\zeta)=\frac{\partial G_0(a,\zeta)}{\partial\nu},$$

其中 a 是在 D 內的任一點。

在三維區域的情況，廣義的施瓦而茨交替法可簡單化。在 § 49 中的方程(4)，我們引用參數 λ，且寫作下形式：

在 S_m 上，

$$u_m(M)+\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{k\neq m}\iint_{S_k}u_k(M_1)\frac{\partial G_k(M,M_1)}{\partial\nu}dS=f_m(M)。\quad(10)$$

將它的解作爲下形式

$$U_m(M)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\lambda^r u_{mr}(M)\quad(11)$$

以求之。於是我們得出遞推公式：

$$\left.\begin{aligned}u_{m0}(M)&=f_m(M),\\ u_{mr}(M)&=\frac{1}{4\pi}\sum_{k\neq m}\iint_{S_k}u_{k,r-1}(M_1)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial\nu}dS。\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

若 M 現在表示區域 D_m 的任一內點，則用 $U_{mr}(M)$ 表示在 D_m 內的調和函數，它在 S_m 上的值由(12)式決定之。但在這情況，有

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_k}u_{k,r-1}(M_1)\frac{\partial G_k(M,M_1)}{\partial\nu}dS=U_{k,r-1}(M),$$

且關係式(12)取下面較簡單形式：

在 S_m 上，

$$U_{m0}(M)=f_m(M),\quad U_{mr}(M)=\sum_{k\neq m}U_{k,r-1}(M)。\quad(13)$$

從(13)式顯然可以如下方式來構造逐次近似解：可取在 D_m 內的調和函數 $U_{m0}(M)$, $m=1,2,\cdots,n$, 且它在曲面 S_m 上等於 $f_m(M)$ 作爲零次近似解。若各次近似解 $U_{m0}(M)$, $U_{m1}(M)$, $\cdots$, $U_{m,r-1}(M)$ 皆已構造好了，則確定在 D_m 內是調和的函數作爲 $U_{mr}(M)$，而它在曲面 S_m 上等於下面的和

$$\sum_{k\neq m}U_{k,r-1}(M)。$$

若區域 D 是雙連通的，則廣義的施瓦而茨交替法所得的級數是收斂的。

這個定理的證明，可在 C. Л. 索波列夫[34]論文中找到。此處我們僅對於三維雙連通區域的情況論之，這個情況的證明是很簡單的。

我們已經指出，廣義的施瓦而茨交替法是和下面的積分方程組❶的逐次迫近法一致的：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } S_1 \text{ 上，}\\&\quad u_1(M)+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2} u_2(M_1)\frac{\partial G_2(M,M_1)}{\partial\nu}\,dS=f_1(M),\\&\text{在 } S_2 \text{ 上，}\\&\quad u_2(M)+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1} u_1(M_1)\frac{\partial G_1(M,M_1)}{\partial\nu}\,dS=f_2(M)。\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

我們考慮含有參數 λ 的齊次積分方程組：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } S_1 \text{ 上，}\\&\quad v_1(M)+\frac{\lambda}{4\pi}\iint\limits_{S_2} v_2(M_1)\frac{\partial G_2(M,M_1)}{\partial\nu}\,dS=0,\\&\text{在 } S_2 \text{ 上，}\\&\quad v_2(M)+\frac{\lambda}{4\pi}\iint\limits_{S_1} v_1(M_1)\frac{\partial G_1(M,M_1)}{\partial\nu}\,dS=0。\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

我們現在證明這方程組的特徵值的模大於 1。由於 § 5 中的證明，從而得知方程組 (14) 的逐次迫近法所得的級數的收斂性。

若 M 是區域 $D_m (m=1,2)$ 的內點，則照前述記 $U_1(M), U_2(M)$ 爲在 D_1, D_2 內的調和函數，且它們在 S_1, S_2 上的值由方程組 (15) 確定之。於是這方程組可再寫作：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } S_1 \text{ 上，}\\&\quad U_1(M)+\lambda U_2(M)=0,\\&\text{在 } S_2 \text{ 上，}\\&\quad U_2(M)+\lambda U_1(M)=0。\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

---

❶ 此處所寫的方程組是使我們感興趣的雙連通區域的情況。

$U_1(M)$ 及 $U_2(M)$ 可能是複函數，然而最大模定理對於它們還保持正確的❶。用 A_k 記 $|U_k(M)|$ 的極大值，且用 N_k 記曲面 S_k 上的這樣的點，使 $|U_k|=A_k$。從方程 (16) 中第一個式子裏令 $M=N_1$，而在第二個式子裏令 $M=N_2$。現在從這兩個方程即有

$$|\lambda|=\frac{A_1}{|U_2(N_1)|}=\frac{A_2}{|U_1(N_2)|}。$$

從而有

$$|\lambda|^2=\frac{A_1}{|U_2(N_1)|}\cdot\frac{A_2}{|U_1(N_2)|}。\tag{17}$$

因區域 D_1 及 D_2 皆是無限的，在這兩個區域內是調和的兩個函數 U_1 及 U_2 相差是一個常數；而在這情況，調和函數在區域的內點處的值眞正地小於它在境界上的極大值。故(17)右端的兩個因子皆大於 1。最後，有 $|\lambda|>1$，即我們所要證的結果。

當區域 D 是有限時，上面所述廣義的施瓦而茨交替級數的收斂性的證明還保持有效。若其中一個區域例如 D_1 是有限的，而另一個區域是無限的，在這情況下，(17)式右端的第一個因子不小於 1，而第二個因子大於 1。仍然有 $|\lambda|>1$，而這就足夠說明交替級數的收斂性。

---

❶ 設在 S_1 上，$|U_1(M)|\leqslant K$。於是在 D_1 的內部，有

$$|U_1(M)|=\frac{1}{4\pi}\left|\iint_{S_1}U_1(M_1)\frac{\partial G_1(M,M_1)}{\partial\nu}dS\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K}{4\pi}\iint_{S_1}\left|\frac{\partial G_1(M,M_1)}{\partial\nu}\right|dS。$$

但格臨函數的法向微商在區域的內部是正的。因此有

$$|U_1(M)|\leqslant\frac{K}{4\pi}\iint_{S_1}\frac{\partial G_1(M,M_1)}{\partial\nu}dS。$$

其次，積分

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\frac{\partial G_1(M,M_1)}{\partial\nu}dS$$

是在 D_1 內爲調和的函數，且它在 S_1 上等於 1。若區域 D 是有限的，則這個函數在 D_1 的內部等於 1；且若區域 D 是無限的，則它小於 1。最後在全部區域 D_1 內，有

$$|U_1(M)|\leqslant K。$$

§ 51. 在地面附近空氣流過飛機翼的流線運動　爲了計算的簡單起見，設飛機翼是一個圓形截面。選坐標軸如圖 12 所示。我們將設飛機翼是沿 x 軸的方向以不變的速度 U 運動着；設在無窮遠處空氣粒子的速度等於零。最後，設這運動是沒有環流的。流動函數 $\psi(x,y)$ 解具有下面的邊界條件❶的變態狄銳希勒問題：

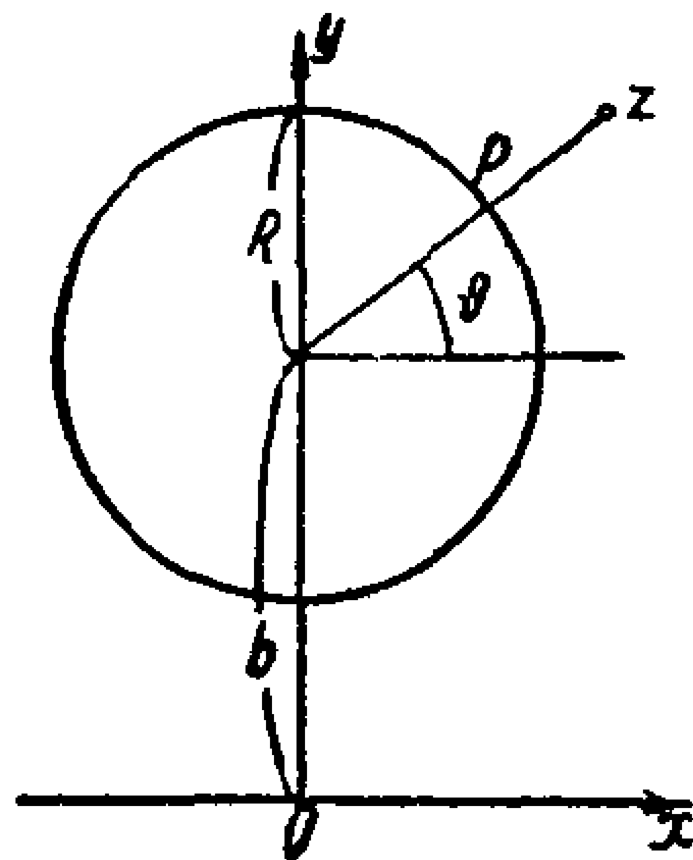


圖 12

在圓周 $|z-b|=R$ 上，

$$\psi=Uy+C',\quad C'=\text{常數},\qquad (1)$$

在 x 軸上

$$\psi=0\ 。\qquad (2)$$

試應用廣義的施窪而茨交替法到這問題上。用 L_1 表記翼截面的境界，用 L_2 表記 x 軸。則 D_1 將代表具有圓洞的平面，D_2 將代表上半平面。因爲在 L_2 上 $\psi=0$，我們能直接利用 § 50 的公式(9)：

$$\psi(x,y)=U_0(x,y)-V_1(x,y)+U_2(x,y)-V_3(x,y)+\cdots\qquad (3)$$

函數 $U_0(x,y)$ 是在 D_1 中調和的，在圓周 L_1 上等於 $Uy=$ $=UR\sin\vartheta$❷。不難看出，函數

$$U_0(x,y)=\frac{UR^2\sin\vartheta}{\rho}=\frac{UR^2(y-b)}{x^2+(y-b)^2}$$

滿足這些條件。在無窮遠處 $U_0(x,y)=0$，在 x 軸上

$$U_0(x,0)=-\frac{UR^2b}{x^2+b^2}\ 。$$

現在 $V_1(x,y)$ 在上半平面中確定爲調和函數，它在半平面的邊界上變爲 $-\frac{UbR^2}{x^2+b^2}$。依照已知的公式

$$V_1(x,y)=-\frac{UbR^2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(\xi^2+b^2)[(\xi-x)^2+y^2]}=-\frac{UR^2(y+b)}{x^2+(y+b)^2}\ 。$$

由 $V_1(x,y)$ 減去其在無窮遠處的數值，並計算所得差在圓周 L_1 上的

---

❶ 見 § 35。

❷ 圖 12 的符號。我們棄去常數 C'，以其在變態的狄銳希勒問題的解中是不重要的。

數值後，從而得到近似的境界值。因爲在無窮遠處 $V_1(x,y)=0$，$U_2(x,y)$ 的境界值簡單地等於在 L_1 上 $V_1(x,y)$ 的數值：

在 L_1 上 $$U_2(x,y)=-\frac{UR^2(2b+R\sin\vartheta)}{R^2+4b^2+4bR\sin\vartheta}。$$

現在依照波桑公式

$$U_2(x,y)=-\frac{UR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2b+R\sin\theta}{R^2+4b^2+4bR\sin\theta}\times$$
$$\times\frac{\rho^2-R^2}{\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\vartheta-\theta)}d\theta=$$
$$=-UR^2\frac{2b[x^2+(y-b)^2]+R^2(y-b)}{R^4+4b^2[x^2+(y-b)^2]+4bR^2(y-b)}。$$

限於所得近似，我們有

$$\psi(x,y)=U_0(x,y)-V_1(x,y)+U_2(x,y)=UR^2\left\{\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{y+b}{x^2+(y+b)^2}-\frac{2b[x^2+(y-b)^2]+R^2(y-b)}{R^4+4b^2[x^2+(y-b)^2]+4bR^2(y-b)}\right\}。\quad(4)$$

§ 52. 彈性理論問題上的應用　廣義的施窪而茨交替法及與其連系着的積分方程組不僅能用於有關拉卜拉斯方程的問題中，且也能用以解在複連通區域中橢圓型方程的邊界問題。試用彈性理論的平面問題爲例闡明這點。祇限於考有限的複連通區域的情形。無限的複連通區域情形可類似地考究。

現在就設立在爲內境界 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 及外境界 L_0 所限定的複連通區域 D 中應力狀況的確定問題。我們知道 (§ 40) 這問題歸結到依照其微商的已給境界值來求在 D 中的雙調和函數。用 $X_{k\nu}$ 及 $Y_{k\nu}$ 表記施於境界 L_k 的外力在 x 及 y 軸方向的分力，並用 W 表記所求的雙調和函數。則

在 L_k 上

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=i\int_{s_0}^{s}(X_{k\nu}+iY_{k\nu})ds+B_k=$$
$$=f_k(z)+B_k,\quad k=0,1,2,\cdots,n;\qquad(1)$$

z 是境界點的複坐標。

在公式(1)中 B_k 是常數。常數 B_k 中的一個可以任意選定，則其餘就由位移的單值性的條件確定。我們將設施於每個曲線 L_k 的合力與合力矩等於零。這是永可作到的。

用 D_0 表記在 L_0 裏面的區域，用 D_k 表記在 L_k 外面的區域，$k=1, 2, \cdots, n$。

容易證明，僅由於實現所表述的條件便可能用雙調和函數的和來代表函數 W:

$$W=W_0+W_1+\cdots+W_n, \tag{2}$$

在這裏的每個函數 W_k 是在其相應的區域中正則的。

事實上，在這情況中與雙調和函數 W 相對應的高爾刹函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 是在 D 中正則的。

在 § 48 的公式(1)中對數項是不存在的，依照 § 48 的公式(4)我們將有

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(z), \quad \psi(z)=\sum_{k=0}^{n}\psi_k(z).$$

又表記

$$\chi_k(z)=\int\psi_k(z)dz。$$

函數 $\chi_k(z)$ 在其相應的區域 D_k 中有單值的實數部分，否則容易看出施於境界 L_k 的合力矩應已不是零了。為了得到公式(2)，現在設

$$W_k=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi_k(z)+\chi_k(z)\}。$$

就夠了。現在假設我們知道如何解區域 D_k 的每一個的彈性理論問題。若對我們說

$$\frac{\partial W_k}{\partial x}+i\frac{\partial W_k}{\partial y}=g_k(z)$$

在與其相應的曲線 L_k 上的數值是已知的，則，在區域 D_k 的每一個裏解已指的問題後，我們求得函數 W_k，且事實上也求得 W。我們的複連通區域 D 的彈性理論問題就是這樣解出了。任務歸結到 $g_k(z)$ 的數值

的構成。

讓我們作一些預先的敍述。

1．我們將不在這裏提述的詳細分析❶引到下一結果：令 D 爲一單連通區域，L 爲其境界。再者，令 U 爲在 D 中雙調和的一函數，並令在境界 L 上

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=g(z).$$

則在區域 D 的任一內點

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\int_L[M_1(x,y;\zeta)g(\zeta)+M_2(x,y;\zeta)\overline{g(\zeta)}]d\zeta,\quad(3)$$

其中 M_1 及 M_2 是連續函數，(x,y) 點留在區域的裏面，而 ζ 點是在它的境界上；這些函數完全地被區域 D 所確定。爲了簡短起見我們將用 $M(z;g)$ 表記(3)的右邊的積分，這樣使

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=M(z;g)。\quad(3_1)$$

我們將用 $M_k(z;g)$ 表記相應於區域 D_k 的算子 M，這樣，特例地，

$$\frac{\partial W_k}{\partial x}+i\frac{\partial W_k}{\partial y}=M_k(z;g_k)。\quad(4)$$

2．若 $g(z)\equiv g=$ 常數，則由彈性理論問題的解的唯一性定理得出

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\equiv g。$$

由此接着得

$$當\quad g(\zeta)\equiv g=常數,\quad M(z;g)\equiv g。\quad(5)$$

3．因爲函數 W_k 在單連通區域中是雙調和的，與之相應的位移是單值的。但是，由於公式(2)，與函數 W 相應的位移也就自然是單值的。自然明顯地，當常數 B_k 爲任意數值時函數(2)不能滿足邊界條件(1)，因爲，如已記載過的，它們的任意選擇一般地說使位移爲多值的。所以我們將這樣地設立我們的問題：我們將求式樣是(2)的函數 W；

---

❶ 見[37b]，第5—8頁。

在這探求中我們將企圖使 W 滿足境界條件

在 L_k 上

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=f_k(z), \tag{6}$$

這滿足準到留有一常數項不確定，這個項在各不同的境界上可能是不同的。

現在不難作出未知函數 $g_k(\zeta)$ 的積分方程組。即，在曲線 L_m 上

$$\frac{\partial W_m}{\partial x}+i\frac{\partial W_m}{\partial y}=g_m(z)。$$

再者，若 $k\neq m$，則 L_m 是在區域 D_k 的裏面，且依照公式(4)

在 L_m 上
$$\frac{\partial W_k}{\partial x}+i\frac{\partial W_k}{\partial y}=M_k(z;\ g_k),$$

其中 z 指 L_m 上的點。利用公式(2)及(5)，我們得到令我們有興趣的一組：

在 L_m 上

$$g_m(z)+\sum_{k\neq m}M_k(z,\ g_k)=f_m(z),\ m=0,\ 1,\ \cdots,\ n。 \tag{7}$$

如在平面的狄銳希勒問題（§ 45）的情況中也是這樣，方程組(7)在一般的情況中是不可解的。為了確信這點試考究齊次組：

在 L_m 上

$$g_m^{(0)}(z)+\sum_{k\neq m}M_k(z,\ g_m^{(0)})=0。 \tag{8}$$

如由公式(6)跟着得出，若僅常數 a_m 服從唯一條件 $a_0+a_1+\cdots+$ $+a_n=0$，方程組(8)滿足 $g_m^{(0)}(z)=a_m=$ 常數。這樣，齊次方程組有不是恆等於零的解，且由弗列德和蒙交比定理得出方程組(7)的不可解性。

現在讓我們這樣地變換方程組(7)，使它變成可解的。在考究中我們引入積分

$$N_k(g)=\int_{L_k}[\alpha_k(\zeta)g(\zeta)+\beta_k(\zeta)\overline{g(\zeta)}]d\zeta, \tag{9}$$

其中函數 $\alpha_k(\zeta)$ 及 $\beta_k(\zeta)$ 我們授予下面的條件：

（1）它們在 L_k 上是連續的。

（2） $$\int_{L_k}\alpha_k(\zeta)d\zeta=1,\quad \int_{L_k}\beta_k(\zeta)d\zeta=0\,。\tag{10}$$

我們把方程組（7）掉換成下式：

在 L_m 上 $$g_m(z)+\sum_{k\neq m}\{M_k(z;g_k)-N_k(g_k)\}=f_m(z);$$
$$m=0,1,\cdots,n\,。\tag{11}$$

我們試證明不管函數 $f_m(z)$ 是什麼，方程組(11)是可解的。爲了這目的試考究相應的齊次方程組

在 L_m 上
$$g_m^{(0)}(z)+\sum_{k\neq m}\{M_k(z;g_k^{(0)})-N_k(g_k^{(0)})\}=0;\tag{12}$$
$$m=0,1,\cdots,n$$

並證明它僅有恆等於零的解 $g_m^{(0)}(z)=0,\ m=0,1,\cdots,n$。令 $g_0^{(0)}(z)$, $g_1^{(0)}(z),\cdots,g_n^{(0)}(z)$ 爲方程組(12)的任何解。我們表記
$$\sum_{k\neq m}N_k(g_k^{(0)})=a_m\,。$$

a_m 的數值顯然是常數。現在由(12)接着得

在 L_m 上
$$g_m^{(0)}(z)+\sum_{k\neq m}M_k(z;g_k^{(0)})=a_m\,。\tag{13}$$

在考究中我們引入在 D_m 中雙調和的函數 $W_m^{(0)}(x,y)$，它在 L_m 上滿足等式
$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x}+i\,\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y}=g_m^{(0)}(z)。$$

依照公式（4）我們在 D_k 的裏面有
$$\frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial x}+i\,\frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial y}=M_k(z;g_k^{(0)})。$$

現在設
$$W^{(0)}(x,y)=\sum_{m=0}^{n}W_m^{(0)}(x,y)。\tag{14}$$

函數 $W^{(0)}(x,y)$ 是在複連通區域 D 中雙調和的；因爲它分解成在單連

通區域中雙調和函數的和，則應於它的是在 D 中是單值的位移。由(13)接着得

在 L_m 上

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x}+i\frac{\partial W^{(0)}}{\partial y}=a_m。\tag{15}$$

由公式(1)接着得

$$X_{k\nu}+iY_{k\nu}=\frac{1}{i}\frac{df_k(z)}{ds}。$$

應用此於等式(15)，其中 $f_k(z)=a_k=$常數，我們求得：$X_{k\nu}=Y_{k\nu}=0$。這樣，雙調和函數 $W^{(0)}$ 就對應於在邊界上沒有外力的複連通區域 D 中的應力狀態。根據唯一性定理，相應的應力恆等於零。則相應的函數 $W^{(0)}$ 就是線性的[見 §39 的公式(4)]，且

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x}+i\frac{\partial W^{(0)}}{\partial y}\equiv\text{常數}。$$

我們試證明

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x}+i\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y},\quad m=0,1,\cdots,n,$$

的數值也是常數。根據 §40 的高爾剎公式(1)

$$W^{(0)}=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)\},\quad W_m^{(0)}=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi_m(z)+\chi_m(z)\};$$

再者，顯然，

$$\varphi(z)=\sum_{m=0}^{n}\varphi_m(z),\quad \chi_m(z)=\sum_{m=0}^{n}\chi(z),\tag{16}$$

對函數 $W^{(0)}(x,y)$ 重導出高爾剎公式並考慮到這函數是線性的，我們容易求得 $\varphi(z)=i\alpha z+\beta$，其中 α 是實常數而 β 是複常數。全然同樣地我們求得 $\chi(z)=\gamma z+\delta$，其中 γ 及 δ 是常數。

我們試證明函數 $\varphi_m(z)$ 及 $\chi_m(z)$ 也有類似的式樣。我們首先對 z 微分等式(16)並將結果用

$$\varphi_m'(z)=i\alpha-\sum_{k\neq m}\varphi_k'(z)$$

式樣表出。等式的左邊，$\varphi_m'(z)$，是在 L_m 的外面正則的，而右邊部分

是在 L_m 的裏面正則的。但是這樣 $\varphi'_m(z)$ 就是在全平面上是正則的。根據里烏維爾定理，$\varphi_m(z)$ 的數值是常數。它必是純虛的，否則 $W_m^{(0)}$ 在無窮遠處的微商爲無窮大。用 $i\alpha_m$ 表記這常數後，我們得 $\varphi'_m(z)=i\alpha_m$ 及 $\varphi_m(z)=i\alpha_m z+\beta_m$。類似地我們求得 $\chi_m(z)=\gamma_m z+\delta_m$。應用 Н. И. 穆斯黑里施維利公式

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x}+i\,\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y}=\varphi_m(z)+z\overline{\varphi'_m(z)}+\overline{\psi_m(z)},\quad \psi_m(z)=\chi'_m(z),$$

我們求得

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x}+i\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y}=\beta_m+\bar{\gamma}_m=\text{常數}。$$

由此，顯然，接着得 $g_m^{(0)}(z)\equiv$ 常數。

這樣，齊次方程組(12)的解都是常數。在這情況中，依照公式(5)，$M_k(z;g_k^{(0)})=g_k^{(0)}$。再者，由公式(9)—(10)也接着得 $N_k(g_k^{(0)})=g_k^{(0)}$。把這代入(12)中，我們求得 $g_m^{(0)}(z)\equiv 0$，即齊次方程組(12)祇有恆等於零的解。由於弗列德和蒙交比定理，方程組(11)是可解的。

解了方程組(11)後，我們同樣地也解區域 D 的彈性理論的問題。事實上，令 $g_m(z)$ 是已指出的方程組的解。我們表記

$$\sum_{k\neq m}N_k(g_k)=B_m。$$

則

在 L_m 上

$$g_m(z)+\sum_{k\neq m}M_k(z;\,g_k)=f_m(z)+B_m。\tag{17}$$

設 $W_m(x,y)$ 是在 D_m 中雙調和的函數，它在境界 L_m 上滿足等式

$$\frac{\partial W_m}{\partial x}+i\frac{\partial W_m}{\partial y}=g_m(z),$$

並令 $W=W_0+W_1+\cdots+W_n$。函數 $W(x,y)$ 是在各個單連通區域中正則的雙調和函數的和，且公式(17)指出這函數滿足條件(1)。我們的問題便同樣地解出了。

在性質上 $N_k(g)$ 可能特例地取

$$N_k(g)=M_k(\infty;g),\quad k=1,2,\cdots,n,$$
$$N_0(g)=M_0(a,\ g),$$

其中 a 是 L_0 裏面的任一點。若境界 $L_0, L_1, \cdots, L_n$ 彼此間是充分地遠隔開的，則立刻顯然方程組(11)中的積分的核就很小，且這方程組就是用逐次迫近法可解的。同樣地也如在狄銳希勒問題中，在這裏我們引到廣義的施窪而茨交替法❶。在下節中我們示出它在一特殊問題中的應用。

§53. **在外圓周上均勻壓縮的偏心圓環**❷。我們置坐標原點於外圓周的心上；取 x 軸的方向在兩心的直線上，指向內圓周的心 A 的一邊。我們用 r 及 R (見圖 13)表記兩圓周的半徑，用 a 表記兩心間的距離。區域 D_0 是圓 $|z|<R$, 區域 D_1 是圓 $|z-a|>r$ 的外面。

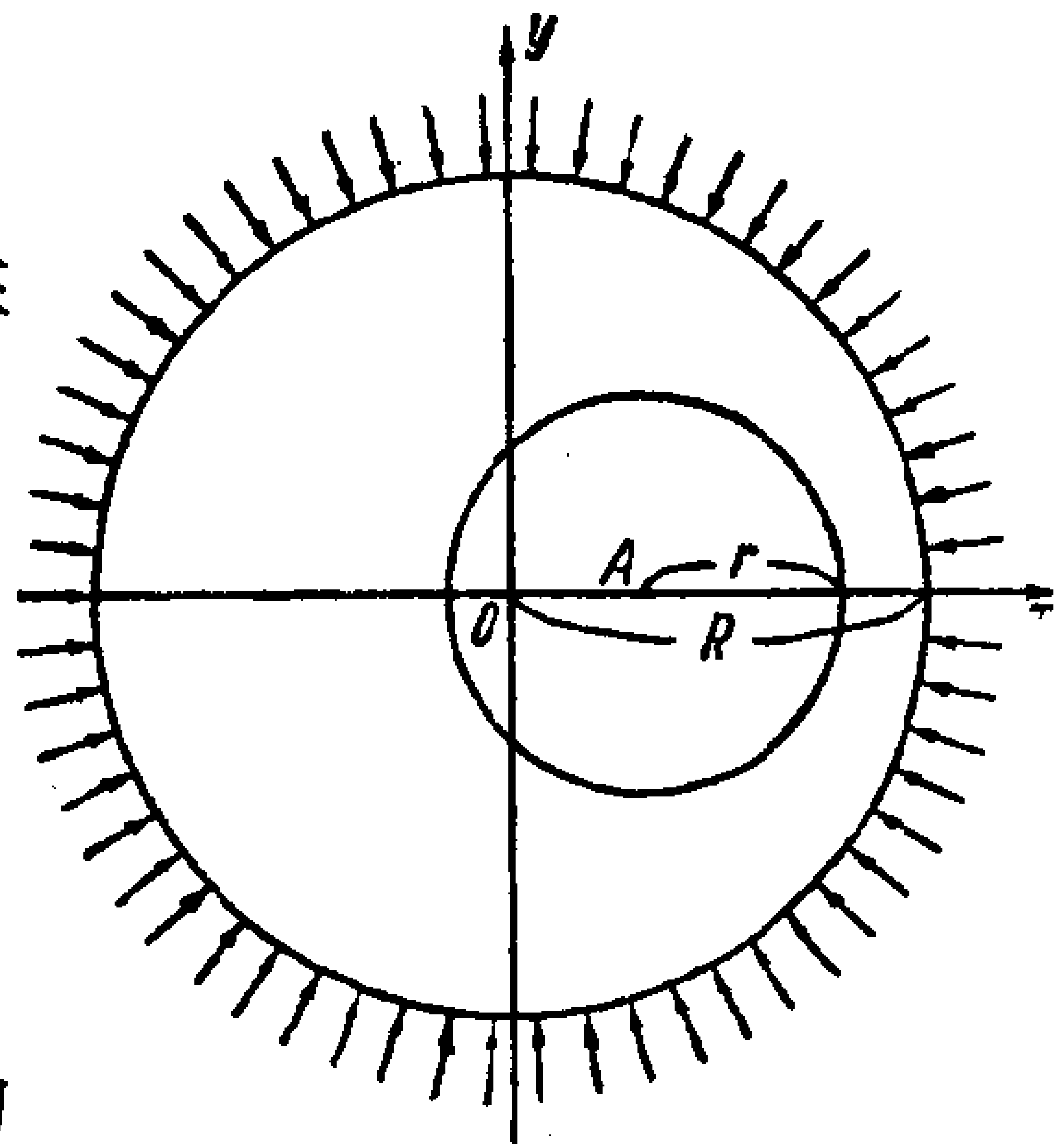


圖 13

區域的邊界上的條件是這樣的：在內圓周 L_2 上 $\dfrac{\partial W}{\partial x}+i\dfrac{\partial W}{\partial y}=f_2(z)=0$;

在外圓周上，

$$X_\nu=-p\cos(\nu,x)=-p\frac{dy}{ds},$$
$$Y_\nu=-p\cos(\nu,y)=p\frac{dx}{ds},$$

其中我們用 p 表記這圓周上所受的均勻法向壓力。由此接着得，在 L_1 上

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=f_1(z)=i\int(X_\nu+iY_\nu)ds=-pz。\qquad (1)$$

積分常數在廣義的施窪而茨交替法的使用中是不重要的，我們把它略去。

❶ 在已提過的論文 С. Л. 索波雷夫 [34] 中已證明若區域是雙連通的則在彈性理論的問題中廣義的施窪而茨交替法也永引到收斂的級數。

❷ 這問題也可能用一些較初級的方法解出。我們提出它作爲方法的示範。我們交替法的應用的較不初級的舉例讀者可在 [27 b] 中找到。

區域 D_0 及 D_1 的彈性理論問題的解是很初級的，且是熟知的。引入高爾利函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$，與 $W(x,y)$ 相連的公式

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

對區域 D_0 說有❶：

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-a_1z-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\zeta)}{\zeta}d\zeta,\\
\psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{f_0(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta-\frac{R^2[\varphi'(z)-a_1]}{z},\\
a_1&=\frac{1}{4\pi i}\int_{L_0}\frac{f_0(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

和對區域 D_1 說有

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f_1(z)}{\zeta-z}d\zeta,\\
\psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{f_1(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{f_1(\zeta)}}{\zeta}d\zeta-z\varphi'(z)。
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

在公式(3)及(4)中 $f_0(\zeta)$ 及 $f_1(\zeta)$ 分別表記在境界 L_0 及 L_1 上(2)的數值。

在我們的問題中 $f_1(\zeta)=0$，且與 §47 的公式(9)相似，我們能把解寫成下式樣

$$W(x,y)=W_1(x,y)-W_2(x,y)+W_3(x,y)-\cdots, \tag{5}$$

其中 W_{2k+1} 都是在 D_0 中雙調和的函數，而 W_{2k} 都是在 D_1 中雙調和的函數。

與公式(2)相應，我們引入解析函數 $\varphi_k(z)$ 及 $\psi_k(z)$，俾使

$$\frac{\partial W_k}{\partial x}+i\frac{\partial W_k}{\partial y}=\varphi_k(z)+z\overline{\varphi_k'(z)}+\overline{\psi_k(z)}。$$

我們仍同意用 ζ 來表記境界 L_0 或 L_1 的點。

❶ 見 [28 a]。這些公式不難由 § 41 的結果中得出。

第一近似解，$W_1(x,y)$，在 L_0 上滿足境界條件

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}+i\frac{\partial W_1}{\partial y}=f_1(\zeta)=-p\zeta\text{。}$$

以此代入（3）中並作計算，我們容易得在 D_0 中

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}+i\frac{\partial W_1}{\partial y}=-pz\text{。}\qquad(6)$$

再者，在境界 L_1 上 $\frac{\partial W_2}{\partial x}+i\frac{\partial W_2}{\partial y}$ 的數值與 $\frac{\partial W_1}{\partial x}+i\frac{\partial W_1}{\partial y}$ 相合；這樣，

在 L_1 上

$$\frac{\partial W_2}{\partial x}+i\frac{\partial W_2}{\partial y}=-p\zeta\text{。}$$

以此代入公式（4）中的 $f_1(\zeta)$，我們在簡單的計算後得

$$\varphi_2(z)=0,\quad \psi_2(z)=-\frac{pr^2}{z-a}-ap,$$

從而在 D_1 的裏面，

$$\frac{\partial W_2}{\partial x}+i\frac{\partial W_2}{\partial y}=-\frac{pr^2}{\bar{z}-a}-ap\text{。}\qquad(7)$$

由（7）減去它在無窮遠處的數值並在 L_0 上計算所得的差值我們求得 $\frac{\partial W_3}{\partial x}+i\frac{\partial W_3}{\partial y}$ 數值的境界值。於是因為在圓周 L_0 上 $\bar{\zeta}=\frac{R^2}{\zeta}$，我們得

$$\frac{\partial W_3}{\partial x}+i\frac{\partial W_3}{\partial y}=-\frac{pr^2}{\bar{\zeta}-a}=-\frac{pr^2\zeta}{R^2-a\zeta}\text{。}$$

又轉到公式（3），我們求得：

$$\varphi_3(z)=-\frac{pr^2(R^2+az)z}{2R^2(R^2-az)},$$

$$\psi_3(z)=\frac{par^2(2a-z)}{(R^2-az)^2},$$

且由此

$$\frac{\partial W_3}{\partial x}+i\frac{\partial W_3}{\partial y}=$$

$$=pr^2\left[\frac{(R^2+az)z}{2R^2(R^2-az)}+\frac{z}{2R^2}-\frac{2R^2}{(R^2-az)^2}-\frac{a(2a-\bar{z})}{(R^2-a\bar{z})^2}\right]。\quad (8)$$

同樣的簡單計算，可得相繼的近似解。

第四章　與勢相似的積分的一些應用

§ 54. 在彈性的平面理論中柯西型積分的應用(穆斯黑里施維利方程) 我們試限於考究當彈性介質裝滿一有限的單連通區域的簡單情況。我們用 D 表記這一區域，用 L 表記它的境界。如我們已知道的，問題是在區域 D 中正則的並在境界 L 上滿足條件

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta) \tag{1}$$

的解析函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的確定。在式(1)中 $f(\zeta)$ 是境界 L 的點的已知連續函數。我們將設它是充分地平滑的。

對我們說把條件(1)表成另一式樣將是方便的，就是我們把其中所有各項換成共軛值：

$$\overline{\varphi(\zeta)}+\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)=\overline{f(\zeta)}。 \tag{2}$$

爲了解我們的問題我們照下法進行。在考究中引入一個在 L 外面的區域 D'。令 z' 爲這區域的任一點。我們用

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta-z'}$$

乘等式(2)的兩邊並沿 L 積分。因爲 $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ 及 $\psi(z)$ 是在 D 中正則的，而 z' 是在 D 的外面，則，由於柯西型積分的已知性質，有恆等式

$$(a)\ \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta\equiv 0,\quad (b)\ \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta\equiv 0,$$

$$(c)\ \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta\equiv 0 \tag{3}$$

成立。利用恆等式(3, c)，我們得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-z'}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta=A(z'), \tag{4}$$

其中

$$A(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}\,d\zeta\,。\tag{5}$$

我們試變換方程(4)。我們在恆等式(3, a)中把所有各項換成共軛值，用 $\bar{z}'$ 乘恆等式(3, b)；把這樣所得的兩等式與(4)相加。我們得方程

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-z'}-\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}-\bar{z}'}{\zeta-z'}\varphi'(\zeta)d\zeta=A(z')。$$

末一積分可能用部分積分法作出，則我們得到不含有 $\varphi'(\zeta)$ 的方程：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-z'}-\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)d\,\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}'}{\zeta-z'}=A(z')。\tag{6}$$

現在令 $z'\to t$，其中 t 為境界 L 的點。依照 § 22 的公式(3)我們容易地得：

$$\lim_{z'\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-z'}\,d\zeta=-\frac{1}{2}\,\overline{\varphi(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta-t}\,d\zeta,$$

$$\lim_{z'\to t}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\,d\bar{\zeta}\right)=-\frac{1}{2}\,\overline{\varphi(t)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}-\bar{t}}\,d\zeta\,。$$

我們提醒，在這些公式中右邊的積分是奇性的。

關於公式(6)的第三項則可以在它的積分號下取極限。

事實上，設 $\zeta-z=r'e^{-i\vartheta}$。則

$$d\,\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}'}{\zeta-z'}=-2ie^{-2i\vartheta}d\vartheta\,。$$

若僅境界 L 是平滑的，它的數值在點 z' 及 ζ 的任何位置時表現出是連續的。但是既然被積函數是連續的，故能在積分號下取極限。完成過到極限後，我們得積分方程

$$\overline{\varphi(t)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\,d\ln\frac{\bar{\zeta}-\bar{t}}{\zeta-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(\zeta)d\,\frac{\bar{\zeta}-\bar{t}}{\zeta-t}=A(t)。$$

設 $\zeta-t=re^{i\vartheta}$，我們把這方程引到下式樣

$$\overline{\varphi(t)}-\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L \varphi(\zeta)e^{-2i\vartheta}d\vartheta=A(t)。\qquad (7)$$

若境界 L 是平滑的，則 $d\vartheta$ 將是點 t 及 ζ 的連續函數。設 $\varphi(t)=$ $=p(t)+iq(t)$ 並在(7)中把實部分與虛部分分開，我們得一組弗列德和蒙型的兩個積分方程。由此知對方程(7)說弗列德和蒙交比定理成立。

方程(7)是 Н. И. 穆斯黑里施維利所得到的。我們在這裏重述它的討論。

我們試從事於方程(7)的研究。我們首先證明它的任一解從境界 L 可解析拓展到全部區域 D 內。通過方程(7)的推導後，我們容易相信它可能用下式樣來表出

$$\lim_{z'\to t}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar z'}d\bar\zeta-\frac{\bar z'}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi'(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}+\bar\zeta\varphi'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}d\zeta\right\}=0。\qquad (8)$$

再者在第二個積分中了解 $\varphi'(z)$ 是沿境界 L 計算的 $\varphi(\zeta)$ 的微商。現在設

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta&=i\Phi(z'),\\ \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}+\bar\zeta\varphi'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}d\zeta&=-i\Psi(z')。\end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

等式(8)變成下式：

$$\overline{\Phi(t)}+\bar t\Phi'(t)+\Psi(t)=0。\qquad (10)$$

函數 $\Phi(z')$ 及 $\Psi(z')$ 是在 D' 中正則的，且等式(10)示出它們在區域的境界上沒有外力作用的假設下給出區域 D' 的彈性理論的平面問題的解。但是根據平面問題解的唯一性定理❶，就有

$$\Phi(z')=i\alpha z'+\beta,\quad \Psi(z')=-\bar\beta,$$

❶ 見 [28 a]，第 111 頁。

其中 α 是實常數，而 β 是複常數。公式(9)示出 $\Phi(\infty)=\Psi(\infty)=0$。於是就有 $\alpha=\beta=0$，及

$$\Phi(z')\equiv 0, \quad \Psi(z')\equiv 0。$$

第一個恆等式示出滿足方程(7)的函數 $\varphi(\zeta)$ 是在全部區域 D 裏面可解析拓展的；由第二個恆等式知函數

$$\psi(\zeta)=-\overline{\varphi(\zeta)}-\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)+\overline{f(\zeta)}$$

也是在這同區域中可解析拓展的。

這樣，解了方程(7)後，我們求得兩個需求未知的高爾利函數的境界值。它們在區域裏面的數值現在雖然就是依照柯西公式也可能求得。這樣，解了方程(7)後，我們同樣也解出彈性理論的問題。

然而，不難示出，在一般的情況中方程(7)是不可解的。事實上，若外力的合力矩不等於零時，換言之，若

$$\mathrm{Re}\int_L \overline{f(\zeta)}d\zeta\neq 0,$$

則彈性理論問題就沒有解。於是方程(7)也就沒有解。相應的齊次方程

$$\overline{\varphi_0(t)}-\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi_0(\zeta)}d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L \varphi_0(\zeta)e^{-2i\vartheta}d\vartheta=0 \qquad (11)$$

有不恆等於零的解。這個解，且是唯一的解，是函數

$$\varphi_0(t)=\alpha t+\beta \qquad (12)$$

(α 是實常數，而 β 是複常數)，相應於沒有外力存在時的彈性理論的平面問題。

由彈性理論平面問題的解的唯一性定理立刻可看出解(12)是唯一的。

可能指出方程(7)的這樣一種變態，若僅施於境界 L 上的外力的合力矩是等於零時，它是可解的，且給出彈性理論問題的解❶。

我們置坐標原點於 D 的裏面。在方程(7)的左邊加上下式

❶ 見 [37 d]。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi i\, t}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}d\bar\zeta\right)。\quad (13)$$

這方程變成如下:

$$\overline{\varphi(t)}-\frac{1}{\pi}\int_L\overline{\varphi(\zeta)}d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L\varphi(\zeta)e^{-2i\vartheta}d\vartheta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i t}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}d\bar\zeta\right)=A(t)。\quad (14)$$

我們試研究方程(14)。我們首先證明它的每一個解是在全部區域 D 中可解析拓展的。這次設

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta=i\Phi(z'),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}+\bar\zeta\varphi'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}d\bar\zeta\right)=-i\Psi(z')$$

就夠了。由與以前類似的討論我們求得

$$\Phi(z')\equiv0,\quad \Psi(z')\equiv0。$$

第一個等式也示出 $\varphi(\zeta)$ 是在區域 D 中可解析拓展的。

現在設施於境界 L 上的外力的合力矩等於零。在這情況中[見§43, 公式(3)]

$$\mathrm{Re}\int_L\overline{f(\zeta)}d\zeta=0。\quad (15)$$

我們試證明由這條件方程(14)的任一解使在(13)中的每一個積分變成零。

我們寫下等式 $\Psi(z')=0$ 的展開形式:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{\overline{\varphi(\zeta)}+\bar\zeta\varphi'(\zeta)-\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z'}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}d\zeta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i z'}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar\zeta^2}d\bar\zeta\right)=0。\quad (16)$$

我們把(16)中的左邊部分在無窮遠點的鄰域內展爲勞潤級數，並[由於恆等式(16)] 令這級數的自由項及 $\frac{1}{z'}$ 的係數等於零。則我們得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=0, \tag{17_1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L [\overline{\varphi(\zeta)}+\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)]\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right)=0\,。 \tag{17_2}$$

等式(17_1)示出在(13)中積分的第一個等於零。轉到等式(17_2)。用部分積分法積分，我們有 $\int_L \bar{\zeta}\varphi'(\zeta)d\zeta=-\int_L \varphi(\zeta)d\bar{\zeta}$。
我們將此代入(17_2)：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L (\overline{\varphi(\zeta)}d\zeta-\varphi(\zeta)d\bar{\zeta})-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right)=0\,。$$

第一項顯然是實數；第二項由於等式(15)也是實數，而第三項是虛數。於是第三項就等於零，即(13)中的第二個積分等於零：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right)=0\,。 \tag{17_3}$$

現在我們證明方程(14)，不管它的右邊部分是什麼，是可解的。依照弗列德和蒙交比定理，祇要證明齊次方程

$$\overline{\varphi_0(t)}-\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi_0(\zeta)}\,d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L \varphi_0(\zeta)e^{-2i\vartheta}\,d\vartheta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i t}\int_B\left(\frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta+\frac{\overline{\varphi_0(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,d\bar{\zeta}\right)=0 \tag{18}$$

僅有恆等於零的解 $\varphi_0(t)\equiv 0$ 就夠了。

方程(18)在 $f(\zeta)\equiv 0$ 時由(14)得出。在這裏條件(15)顯然是已被

滿足，所以對方程(18)的任一解說等式(17_1)及(17_2)成立。在(18)中的末兩項不復存在，且這方程與(11)合而為一。公式(12)就給出它的解。現在把(12)代入(17_1)及(17_2)中並回憶α是實數，我們求得$\alpha=\beta=0$，所以，$\varphi_0(t)\equiv 0$。方程(14)的可解性獲得證實。

現在設為了彈性理論問題有解的必要的條件(15)已被滿足。不難證明則方程(14)的解引到我們問題的解。事實上，滿足方程(14)的函數$\varphi(t)$使(13)式變成零。則方程(14)變到(7)，關於(7)已證明它的解引到彈性理論問題的解。

關於在這節中所寫出的方法我們作下面的註釋：

1．過到複連通區域時積分方程(7)及(14)的式樣不變。然而這方程的研究就非常複雜。在提出的Д. И. 雪爾曼的論文 [37 d] 中有關於複連通區域情況的詳細分析。

2．若境界L有尖點，則方程(7)及(14)就不歸結到弗列德和蒙型。但是弗列德和蒙定理對這些方程說仍然有效。關於它的詳情參看Л. Г. 馬革納拉奇傑的論文 [26 a]。

Д. И. 雪爾曼在他的論文 [37 f, g] 裏也應用了柯西型積分到不均勻的且不各向同性的彈性介質的情況。

§55．具有一系列無限多截段的彈性平面 柯西型積分的應用使我們能解下面的有趣的問題。設彈性介質充滿截去一系列無限多相同且週期性分佈的洞孔後的整個平面(圖 14)。再者設所有這些截洞都受有相同外力的作用。我們在這指出的條件下設立彈性介質中應力的

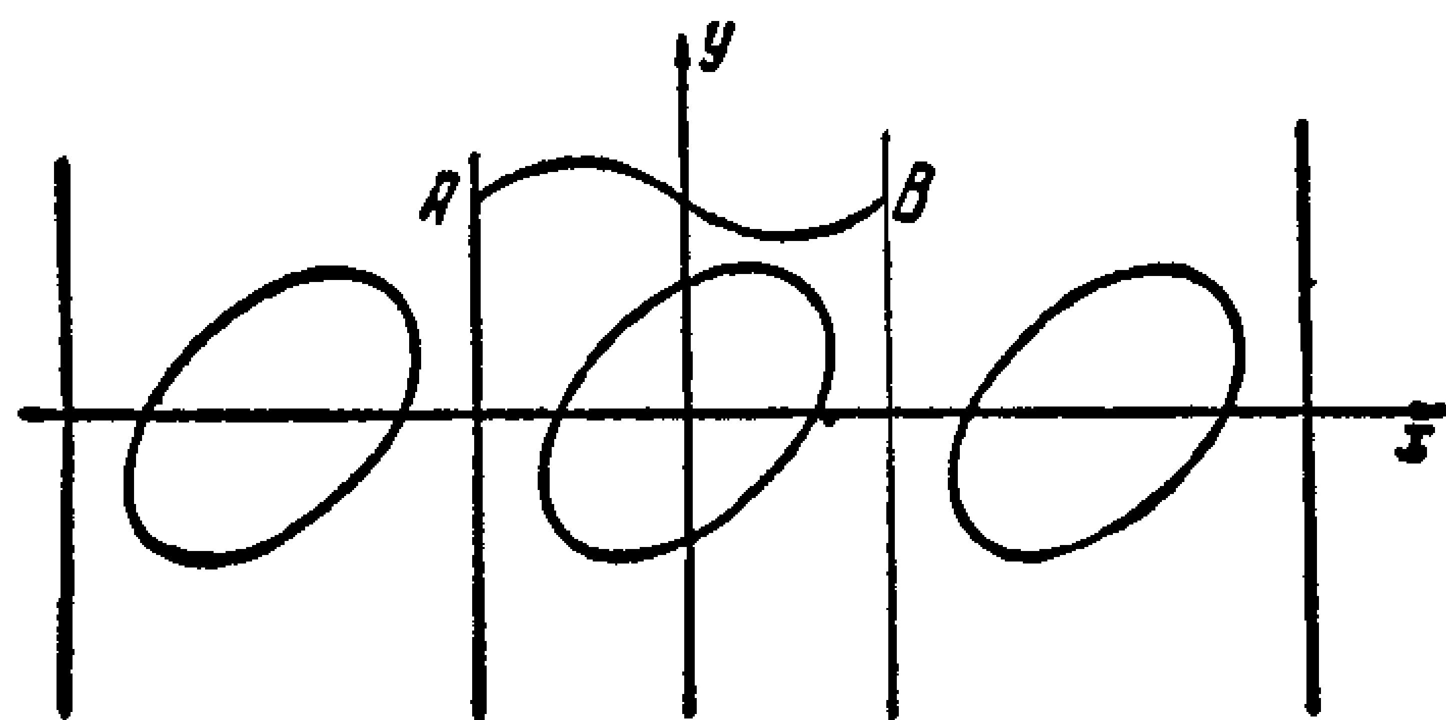


圖 14

確定問題。

我們假定施於每個截洞上的外力的合矢量各個等於零。與平常一樣，問題歸結到在每個截洞上滿足條件

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta)+C \tag{1}$$

的解析函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的確定。在(1)中 $f(\zeta)$ 是一給出的函數。顯然，在所有截洞的境界上相應的各點處 $f(\zeta)$ 取相同的數值。關於常數 C，則，如我們在下面看出，它在所有境界上有同一的數值。

在我們的問題中的應力與位移都是 x 的週期函數，其週期為 a。我們試闡明以 $x+a$ 代替 x 或，同樣，以 $z+a$ 代替 z 時 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 如何改變。

我們利用 § 40 的公式(5)，(6)及(7)

$$\sigma_x+\sigma_y=4\,\mathrm{Re}\,\{\varphi'(z)\}, \tag{5, 40}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)], \tag{6, 40}$$

$$2\mu(u_x+iu_y)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}。 \tag{7, 40}$$

寫出的公式的第一個示出以 $z+a$ 代替 z 時 $\mathrm{Re}\,\{\varphi'(z)\}$ 不變。由此接着知 $\varphi''(z)$ 有週期 a。事實上，令 $\mathrm{Re}\,\{\varphi'(z)\}=p(x,y)$。則 $p(x+a,y)\equiv p(x,y)$。微分這恆等式，我們有

$$\frac{\partial p(x+a,y)}{\partial x}=\frac{\partial p(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial p(x+a,y)}{\partial y}=\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}.$$

再者

$$\varphi''(z)=\frac{\partial p}{\partial x}-i\,\frac{\partial p}{\partial y},$$

且 $\varphi''(z)$ 的週期性立刻地接着僅由寫出的恆等式得出。

積分恆等式 $\qquad \varphi''(z+a)\equiv\varphi''(z),$

我們得

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(z+a)&=\varphi'(z)+i\alpha,\\ \varphi(z+a)&=\varphi(z)+i\alpha z+a\beta,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 α 及 β 是某些常數。因爲以 $z+a$ 代替 z 時 $\varphi'(z)$ 的實部分不變，常數 α 必須是實數。

轉到公式(6,40)。以 $z+a$ 代替 z 時它的左邊部分不變。由此

$$(\bar{z}+a)\varphi''(z+a)+\psi'(z+a)=\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z),$$

且，由於函數 $\varphi''(z)$ 的週期性，

$$\psi'(z+a)=\psi'(z)-\varphi''(z)。$$

積分這等式，我們求得

$$\psi(z+a)=\psi(z)-a\varphi'(z)+\gamma, \qquad (3)$$

其中 γ 是某常數。

現在在公式(7,40)中以 $z+a$ 代替 z，並在 $\varphi(z+a)$，$\varphi'(z+a)$ 及 $\psi(z+a)$ 的地方代入它們的數值(2)及(3)。利用位移的週期性，我們容易地求得 $\alpha=0$ 及 $\gamma=a\bar{\beta}\varkappa$。這樣，$\varphi'(z)$ 有週期 a，而 $\varphi(z)$ 的改變量是一常數 $a\beta$。公式(3)給出 $\psi(z)$ 的改變量。

我們設

$$\varphi_0(z)=\varphi(z)-\beta z, \qquad (4)$$

$$\psi_0(z)=\psi(z)+z\varphi'(z)-\bar{\beta}\varkappa z。 \qquad (5)$$

函數 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 顯然是週期的，其週期爲 a，且公式(4)及(5)用兩個週期函數給出 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的式子。

我們試闡明 β 數值的力學意義。在任一週期的地帶的邊界限的直線上，我們取縱坐標相同的兩點 A 及 B (圖 14)，並把這兩點間用一全在這週期的地帶中且不與彈性介質的境界相交的連續曲線接連。我們試求作用於弧 AB 上的應力的合矢量。用 X 及 Y 表記已指出的矢量在坐標軸上的分量，我們依照已知的 H. И. 穆斯黑里施維利公式(見[28 a]，第 109 頁)有

$$i(X+iY)=[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}]_A^B。$$

在這裏依照公式(4)及(5)代替 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 並利用函數 $\varphi_0(z)$，$\varphi'(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 的週期性，我們得

$$i(X+iY)=[\varphi_0(z)+2iy\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi_0(z)}+(1+\varkappa)\beta z]_A^B=$$
$$=(1+\varkappa)\beta a,$$

由此

$$\beta=\frac{i(X+iY)}{(1+\varkappa)a}\text{。} \tag{甲}$$

這樣，常數 β 為作用於弧 AB 上的應力的合矢量的分量所確定。由公式(甲)也接着得知已指出的矢量不與 A 及 B 兩點的如何選擇有關。

現在設當 $y\to\infty$ 時應力趨向零。則，顯然，$X=Y=0$ 且從而，$\beta=0$。代替(4)及(5)的我們得較簡單的公式

$$\varphi(z)=\varphi_0(z),\quad \psi(z)=\psi_0(z)-z\varphi_0'(z), \tag{6}$$

其中 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 是週期函數，其週期為 a。當 $y\to\pm\infty$ 時我們將認為它們是有界的，則當 $y\to\pm\infty$ 時應力將趨向零。

依照公式(6)代替在(1)中的函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$，我們得新函數 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 的境界條件：

$$\varphi_0(\zeta)+(\zeta-\bar{\zeta})\overline{\varphi_0'(\zeta)}+\overline{\psi_0(\zeta)}=f(\zeta)+C\text{。}$$

因為進入這等式中的所有各項是週期性的，所以 C 在所有各境界上有同一的數值。現在我們能利用在 C 的確定中的任意性來設 $C=0$。最後問題歸結到滿足境界條件：

$$\varphi_0(\zeta)+(\zeta-\bar{\zeta})\overline{\varphi_0'(\zeta)}+\overline{\psi_0(\zeta)}=f(\zeta) \tag{7}$$

的週期函數 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 的探求。用普通方法可能證明 $\varphi_0(\zeta)$ 及 $\psi_0(\zeta)$ 除不定的常數項外是唯一確定的。

現在設

$$e^{\frac{2\pi iz}{a}}=t,\quad z=\frac{a}{2\pi i}\ln t\text{。} \tag{8}$$

變換(8)，使地帶 $0\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant a$ 變到沿正向半實軸截得的 t 平面上，而在某有限區域裏分佈在指出的地帶中的截洞不包括坐標原點的(圖 15)。我們用 L 表記這區域的境界。函數

$$\Phi(t)=\varphi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\ln t\right)$$

在截得的 t 平面上境界 L 的外面是正則的。因爲對 z 説是週期性的，這函數在幾何上相合的截縫的各點取相同的數值，所以它是可通過截縫連續拓展的。於是，如已知的[1]，它就是可通過截縫解析拓展的，且在 t 平面的在 L 的外面的全部區域中是正則的。自然，同樣的話也可對函數

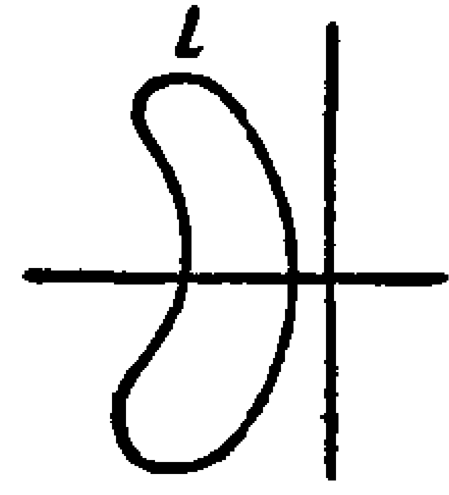


圖 15

$$\Psi(t)=\psi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\ln t\right)$$

説出。這樣，任務便歸結到 $\Phi(t)$ 與 $\Psi(t)$ 兩個在 L 外面正則的函數的探求。在(7)中設 $\zeta=\frac{a}{2\pi i}\ln\tau$，我們得這兩函數的境界條件爲：

$$\Phi(\tau)-2\bar{\tau}\ln|\tau|\overline{\Phi'(\tau)}+\overline{\Psi(\tau)}=F(\tau),$$
$$F(\tau)=f\left(\frac{a}{2\pi i}\ln\tau\right)。\qquad (9)$$

已記載過了，$\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 是除常數項外全已確定。我們這樣固定這常數，要它使當 $t\to\infty$ 時 $\Psi(t)\to 0$。

爲了解出我們的問題我們應用前節也用過的相同方法。在等式(9)中我們把所有各項換成共軛值；再者，我們用 $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\tau}{\tau-t'}$ 乘它，其中 t' 是 L 裏面的一點，並沿 L 依照反時針方向積分。則我們得

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\tau-t'}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\tau\ln|\tau|\Phi'(\tau)}{\tau-t'}d\tau=A(t'),\\ A(t')=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{F(\tau)}{\tau-t'}d\tau。\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

因爲函數 $\Phi(t)$ 是在 L 的外面正則的，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi(\tau)}{\tau-t'}d\tau=\Phi(\infty)。$$

令 c 爲 L 裏面的一個固定的點。在這恆等式中我們設 $t'=c$。兩者相減，我們得

[1] 參看，例如，И. И. 普里瓦洛夫所著的複變數函數導論。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau-t'}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau-c}\,d\tau=0\,。\tag{11}$$

微分，然後用部分積分法積分，我們得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi'(\tau)}{\tau-t'}\,d\tau=0\,。\tag{12}$$

在恆等式(11)中我們把所有各項換成共軛值，用 $2\bar{t}'\ln|t'|$ 乘恆等式(12)，並把兩結果與(10)相加。我們用部分積分法取含有 $\Phi'(\tau)$ 的積分。最後，我們在方程的左邊部分加上 $\frac{i}{2\pi}\,\overline{\ln t'}\,\mathrm{Re}\left\{\int_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau-\bar{c})^2}\,d\tau\right\}$ 的數值。再者，設 $t'\to\tau_0$，其中 τ_0 是境界 L 的一點，我們得積分方程

$$\overline{\Phi(\tau_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\Phi(\tau)}\,d\ln\frac{\tau-\tau_0}{\bar{\tau}-\bar{\tau}_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \Phi(\tau)\,d\,\frac{\bar{\tau}\ln|\tau|-\bar{\tau}_0\ln|\tau_0|}{\tau-\tau_0}+$$
$$+\frac{i}{2\pi}\,\overline{\ln\tau_0}\,\mathrm{Re}\left\{\int_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau-c)^2}\,d\tau\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{c}}\,d\bar{\tau}=$$
$$=A(\tau_0),\tag{13}$$

它與一組兩個弗列德和蒙方程❶是等價的。

在這裏我們不作方程(13)的分析，——這使字句上幾乎與前節是一樣的，——而我們祇表述結果：

1．滿足方程(13)的函數 $\Phi(\tau_0)$ 在曲線 L 的外面的全部區域是可解析拓展的；再者它在無窮遠處是有限的。

2．若 $\Phi(\tau_0)$ 滿足方程(13)，則函數

$$\Psi(\tau_0)=\overline{F(\tau_0)}-\overline{\Phi(\tau_0)}+2\bar{\tau}\ln|\tau_0|\Phi'(\tau_0)\tag{14}$$

在曲線 L 的外面的全部區域是可解析拓展的，且在無窮遠處等於零。

3．不論函數 $F(t)$ 是什麼，方程(13)是可解的。

由所述顯然，爲(13)及(14)及其解析拓展所確定的函數 $\Phi(t)$ 及 $\Psi(t)$ 解出我們所設的問題。

❶ 若我們在(13)中把實部分與虛部分分開並引入性質上不知的

$$\mathrm{Re}\,\{\Phi(\tau_0)\}\quad 及\quad \mathrm{Im}\,\{\Phi(\tau_0)\},$$

我們就得到這組。

§56. 勞瑞西拉方程 在彈性理論的平面問題中積分方程方法是在 1908 年爲勞瑞西拉 (G. Lauricella) [23] 所首先應用的。然而,他的一些方程與它們的推導是很繁重而不方便的。Д. И. 雪爾曼[37 j]用複數式樣表現出勞瑞西拉方程,並給出它們的新的且遠較前簡單的推導。在這新的式樣中這些方程表現出比較地簡單了,極接近於 Н. И. 穆斯黑里施維利的簡易方程 (§54)。

在這節裏我們重述限於單連通有限區域的情況的 Д. И. 雪爾曼的推導。

在這情況中,如我們已知道的,問題是兩函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的確定,這兩函數在充滿彈性介質的區域 D 中是正則的,並在這區域的境界 L 上滿足條件

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta), \tag{1}$$

其中 $f(\zeta)$ 是已給出的連續函數,我們將設這函數是足夠平滑的。我們回憶 $f(\zeta)$ 必須滿足表明施於 L 上的外力的合力矩等於零的條件

$$\operatorname{Re}\int_L \overline{f(\zeta)}d\zeta=0\text{ 。} \tag{2}$$

我們將尋求下面式樣的柯西型積分式樣的 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{3}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\zeta}\,\omega(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\zeta)d\bar{\zeta}}{\zeta-z}, \tag{4}$$

其中 $\omega(\zeta)$ 是必須在境界 L 上確定的未知函數。

我們用(3)及(4)組成 $\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$ 的式子,並使 z 指境界 L 的某點。利用柯西型積分的極限值的公式,我們立刻得到未知函數 $\omega(t)$ 的積分方程❶:

❶ 在這裏我們略去變換的詳情,因爲它們與 §54 中的變換在字句上幾乎是相同的。

$$\omega(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(\zeta)d\ln\frac{\zeta-t}{\bar{\zeta}-\bar{t}}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(\zeta)}d\frac{\zeta-t}{\bar{\zeta}-\bar{t}}=f(t)。\tag{5}$$

這也是複數式樣的勞瑞西拉方程。

可能證明的是方程(5)在一般的情況中是不可解的。爲了使它是可解的，我們加於它的左邊部分的數值

$$b\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)$$

其中 a 是區域 D 裏面的一點，及

$$b=\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta。\tag{6}$$

又設 $\zeta-t=re^{i\vartheta}$。方程(5)變換成下式

$$\omega(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \omega(\zeta)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega(\zeta)}e^{2i\vartheta}d\vartheta+$$

$$+\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta=f(t)。\tag{7}$$

我們試研究方程(7)。首先我們證明它的每一個解使 b 的數值變爲零。爲了這目的我們回到函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$。

以相反的次序作計算，它引我們到方程(5)，我們把(7)表成下式樣

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+b\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)=f(t)。$$

現在我們用 $\overline{dt}$ 乘這等式並沿 L 積分。其後由簡單的變換我們得

$$\int_L(\varphi(t)\overline{dt}-\overline{\varphi(t)}dt)+b\int_L\left(\frac{\overline{dt}}{t-a}+\frac{dt}{\bar{t}-\bar{a}}\right)+2\pi i b=\int_L f(t)\overline{dt}。$$

由(6)看出 b 的數值是虛數。則，顯然，上面的等式的左邊的實數部分是 $2\pi i b$，它的右邊的根據條件(2)是等於零。這樣，$b=0$。

由已證的接着知方程(7)的每一個解滿足代替它的方程(5)。把

已指出的解代入(3)及(4),我們來到彈性理論問題的解。

現在我們試證明方程(7)是可解的。根據弗列德和蒙交比定理,祇要證明齊次方程僅有恆等於零的解就夠了。

我們設 $f(t)\equiv 0$。則我們來到齊次方程

$$\omega_0(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \omega_0(\zeta)d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega_0(\zeta)}e^{2i\vartheta}d\vartheta+$$

$$+\frac{1}{\pi i}b_0\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar{t}-\bar{a}}+\frac{t-a}{(\bar{t}-\bar{a})^2}\right)=0。\qquad (8)$$

在這裏

$$b_0=\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta。\qquad (9)$$

由已證的,$b_0=0$。現在依照公式(3)及(4)設

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\qquad (10)$$

$$\psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\omega_0(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)d\bar{\zeta}}{\zeta-z}。\qquad (11)$$

由方程(8),考及 $b_0=0$, 我們得

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0。$$

上一等式示出 $\varphi_0(t)$ 及 $\psi_0(t)$ 解出在境界 L 上沒有應力的假定下彈性理論的平面問題。根據唯一性定理

$$\varphi_0(z)=i\alpha z+\beta,\quad \psi_0(z)=-\bar{\beta},$$

其中 α 是實常數,而 β 是複常數。

不難看出 $\alpha=0$。事實上,$b_0=0$。但是由(9)及(10)接着知

$$0=b_0=2i\operatorname{Im}\{\varphi_0'(a)\}=2i\alpha。$$

這樣,

$$\varphi_0(z)=\beta,\quad \psi_0(z)=-\bar{\beta}。$$

在式子(11)中我們用部分積分法取第二個積分:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\omega_0(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d(\bar{\zeta}\omega_0(\zeta))}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{\zeta}\omega_0'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)}{\zeta-z}d\bar{\zeta}\text{。}$$

以此代入(11)中:

$$\psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)}-\bar{\zeta}\omega_0'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\text{。}\tag{11$_1$}$$

在式樣上已有 $\varphi_0(z)=\beta$ 及 $\psi_0(z)=-\bar{\beta}$，我們由(9)及(11_1)得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(\zeta)-\beta}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(\zeta)}-\bar{\zeta}\omega_0'(\zeta)+\bar{\beta}}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0\text{。}$$

由此看出 $\omega_0(\zeta)-\beta$ 及 $\overline{\omega_0(\zeta)}-\bar{\zeta}\omega_0'(\zeta)+\bar{\beta}$ 都是在 L 外面正則的且在無窮遠處等於零的解析函數的境界值。我們用 $i\delta(z)$ 及 $i\varepsilon(z)$ 這樣地表記它們，使

$$\left.\begin{aligned}i\delta(\zeta)&=\omega_0(\zeta)-\beta,\\ i\varepsilon(\zeta)&=\overline{\omega_0(\zeta)}-\bar{\zeta}\omega_0'(\zeta)+\bar{\beta}\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由這兩等式消去 $\omega_0(\zeta)$:

$$\overline{\delta(\zeta)}+\bar{\zeta}\delta'(\zeta)+\varepsilon(\zeta)+2i\bar{\beta}=0\text{。}$$

函數 $\delta(z)$ 及 $\varepsilon(z)+2i\beta$ 給出在 L 外面的區域的彈性理論的齊次(卽當外力不存在時)的問題的解。根據唯一性定理 $\delta(z)=i\alpha'z+\beta'$, $\varepsilon(z)+$ $+2i\bar{\beta}=-\bar{\beta}'$。但是 $\delta(z)$ 在 L 的外面是正則的，且在無窮遠處是等於零。由此 $\alpha'=\beta'=0$, $\delta(z)\equiv 0$, 且因爲 $\varepsilon(\infty)=0$, 故 $\beta=0$。現在由(12)接着得所須證明的 $\omega_0(\zeta)=i\delta(\zeta)+\beta\equiv 0$。

試說一些關於勞瑞西拉的方程(5)。我們已記載過，在一般的情況中它是不可解的。然而，不難證明(此處我們不證明)，對它的可解性說條件(2)是必要的且是充分的。

我們試應用方程(5)到爲橢圓所限定的區域 D 的情況 [37 l]。令

這橢圓的參數方程爲

$$\xi=a\cos\theta,\quad \eta=b\sin\theta,\quad \zeta=\xi+i\eta。$$

我們設

$$\zeta=\frac{c}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right),\tag{13}$$

其中 $\sigma=\rho e^{i\varphi}$，而常數 $\rho(\rho>1)$ 及 c 爲等式

$$c=\sqrt{a^2-b^2};\quad \rho=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

所確定。變換(13)使橢圓變成圓周 $|\sigma|=\rho$。我們用 γ 表記這圓周。我們仍設

$$t=\frac{c}{2}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)。\tag{14}$$

我們以(13)及(14)代入(5)；也表記

$$\omega(\zeta)=\omega^*(\sigma),\quad f(t)=f^*(\tau)。$$

則我們來到方程

$$\omega^*(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\omega^*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\frac{1}{\tau}}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\omega^*(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\frac{\rho^4}{\tau}}-$$

$$-\frac{\rho^4-1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega^{*\prime}(\sigma)}}{\sigma}\frac{d\sigma}{\sigma-\frac{\rho^4}{\tau}}=f^*(\tau)。\tag{15}$$

我們把 $\omega^*(\tau)$ 及 $f^*(\tau)$ 展開成富里耶級數，或，同樣，依照 τ 的冪級數，並令

$$\omega^*(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\tau^k,\quad f^*(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k\tau^k。$$

我們以此代入(15)並比較相同 τ 的冪的係數。我們就得到一組具有未知數 a_k 的方程

$$2a_0=A_0,$$

$$a_k+a_{-k}\rho^{-4k}+(\rho^4-1)k\bar{a}_k\rho^{-2(k+1)}=A_k,$$

$$a_k+a_{-k}=A_{-k};\quad k=1,2,\cdots$$

第一個方程確定 a_0。由其他兩個我們消去 a_{-k}。我們就得到具有一個未知數 a_k 的方程；

$$(1-\rho^{-4k})a_k+\rho^{-2(k+1)}(\rho^4-1)k\bar{a}_k=A_k-\rho^{-4k}A_{-k}。$$

由此可能求得，除掉 $k=1$，所有 k 數值的 a_k。當 $k=1$ 時上面的方程給出

$$a_1+\bar{a}_1=\frac{A_1-\rho^{-4}A_{-1}}{1-\rho^{-4}}。$$

上一等式的右邊部分必是實數。可能容易地驗證這最後條件與條件(2)合而爲一。設這條件已被滿足，我們求得

$$\mathrm{Re}(a_1)=\frac{1}{2}\,\frac{A_1-\rho^{-4}A_{-1}}{1-\rho^{-4}}。$$

a_1 的虛數部分可以任意選擇。

知道了 $k>1$ 的 a_k，我們依照

$$a_{-k}=A_{-k}-a_k$$

求得 a_{-k}。

現在 $\omega^*(\sigma)=\omega(\zeta)$ 是已知的。我們從事於 $\varphi(z)$ 的計算。在公式(3)中我們設

$$z=\frac{c}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\quad \zeta=\frac{c}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)。$$

因爲 z 是在 L 的裏面，就不難相信 $1\leqslant|\lambda|\leqslant\rho$。則公式(3)給

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega^*(\sigma)(\sigma^2-1)}{\sigma(\sigma-\lambda)\left(\sigma-\frac{1}{\lambda}\right)}d\sigma=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{a_k}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^{k-1}(\sigma^2-1)}{(\sigma-\lambda)\left(\sigma-\frac{1}{\lambda}\right)}d\sigma。$$

當 $k<0$ 時被積函數在 γ 的外面是正則的，且在無窮遠處依 σ^{k-1} 變成零。根據已知的柯西定理，相應的積分等於零。當 $k=0$ 時被積函數也是在 γ 的外面正則的，但是在無窮遠處它的殘數等於一。相應的積分等於一。最後，當 $k>0$ 時被積函數在 γ 的裏面有分別具有殘數 λ^k 及

λ^{-k} 的一級極點 $\sigma=\lambda$ 及 $\sigma=\frac{1}{\lambda}$。這給我們

$$\varphi(z)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda^k+\lambda^{-k})。$$

用 z 表 λ，我們得到 $\varphi(z)$ 展開成多項式組成的級數:

$$\varphi(z)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{c^k}[(z+\sqrt{z^2-c^2})^k+(z-\sqrt{z^2-c^2})^k]。\quad (16)$$

§ 57. 波方程的狄銳希勒問題 波方程

$$\Delta U+k^2U=0 \quad (1)$$

(Δ 是拉卜拉斯算子)在很多數學物理問題中起着重大的作用。它特殊的在駐定的電磁振盪的問題中表出。在這裏我們考究方程(1)的狄銳希勒問題，在這考究中祇限於平面的單連通有限區域的情況。有關波方程的問題的較一般的述說，讀者可在 B. Д. 庫普拉奇傑 [20] 及 B. 施切兒貝兒加 [38] 的著作中找到。

不難看出，在 k 是某數值時方程(1)的狄銳希勒問題是不可解的。爲了證明這點，我們注意下面。令 $f(\sigma)$ (σ 是弧的長度)爲在區域 D 的境界 L 上函數 $U(x,y)$ 的數值。狄銳希勒問題是在用 $f(\sigma)$ 數值滿足給出的方程(1)的函數 $U(x,y)$ 的確定。令 $G(x,y;\xi,\eta)$ 爲區域 D 的格臨函數。依照格臨公式

$$U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_D \Delta U(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi\, d\eta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_L f(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

或，由於方程(1)，

$$U(x,y)-\frac{k^2}{2\pi}\iint_D G(x,y;\xi,\eta)U(\xi,\eta)d\xi\, d\eta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_L f(\sigma)\frac{\partial G}{\partial \nu}\, d\sigma。\quad (2)$$

等式(2)是具有參數 $\frac{k^2}{2\pi}$ 及核 $G(x,y;\xi,\eta)$ 的未知函數 $U(x,y)$ 的

弗列德和蒙型積分方程。這核是對稱的且不是退化的，所以存在着無限多個特徵值 λ，也就是無限多個 k^2 數值，它們的方程（2）是不可解的。這些 k^2 數值是實數。我們試證明它們是正的（所以 k 的數值是實數）。令 $\lambda_n=\frac{k_n^2}{2\pi}$ 爲特徵數值及 $U_n(x, y)$ 爲相應的特徵函數。根據定義，恆等式

$$U_n(x, y)-\frac{k_n^2}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta)U_n(\xi, \eta)d\xi d\eta=0 \qquad (3)$$

成立。以此與方程（2）相比較，我們看出 $U_n(x, y)$ 在境界 L 上變成零，且在區域的裏面滿足方程

$$\Delta U_n+k_n^2U_n=0\text{。} \qquad (4)$$

依照格臨公式

$$\iint_D U_n\,\Delta U_n\,dx\,dy=$$

$$=-\iint_D\left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\int_L U\frac{\partial U}{\partial \nu}d\sigma\text{。}$$

但是，因爲在 L 上 $U=0$，境界積分等於零。再者，$\Delta U_n=-k_n^2U_n$。現在由最後等式接着得

$$k_n^2=\frac{\iint_D\left[\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_n}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy}{\iint_D U_n^2(x, y)dx\,dy}>0\text{。}$$

k_n 數值是實數的情況在物理學中有簡單的解釋：k_n 是與充滿區域 D 的介質的固有振動的頻率成正比的數值。

我們將在這裏考究假定 $k\neq k_n$ 的狄銳希勒問題。

我們的狄銳希勒問題的一個解出方法已大體上指出了。就是，這問題引到積分方程（2）。若已知格臨函數及其特徵函數 $U_n(x, y)$，這方程就便於利用；在這情況中方程（2）用§19 的方法解出。然而，特徵

函數 $U_n(x,y)$ 已建立的方面不多；在一般的情況中能有具有較簡單的核的積分方程是有用的。

這樣的方程可能利用所謂廣義的偶層勢

$$U(x,y)=\int_L \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{2i}H_0^{(2)}(kr)\right]d\sigma \tag{5}$$

來建立，其中 $H_0^{(2)}$ 是第二種赫克爾函數❶，r 是由 (x,y) 點到境界點 σ 的距離，ν 是境界的向外法線。依從一般習慣，我們用指號 i 及 e 表記分別由區域 D 的裏面及外面趨向境界的極限。則可能證明，對數勢的已知正確公式是

$$\left.\begin{aligned} U_i(x,y)&=-\mu(s)+\int_L \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{2i}H_0^{(2)}(kr)\right]d\sigma,\\ U_e(x,y)&=\ \ \mu(s)+\int_L \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{2i}H_0^{(2)}(kr)\right]d\sigma,\\ &\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_i=\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_e。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在這裏已用 s 表記 (x,y) 點趨向的境界點，並已用 n 表記在 s 點處境界的向外法線。再者，與在裏面的一樣，在 L 外面的 $U(x,y)$ 也滿足方程(1)。

若我們尋求狄銳希勒問題的勢(5)式樣的解，則公式(6)領我們到關於 $\mu(s)$ 的弗列德和蒙型積分方程：

$$\mu(s)-\int_L \mu(\sigma)\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{2i}H_0^{(2)}(kr)\right]d\sigma=-f(s)。 \tag{7}$$

我們在這裏不詳細示出在狄銳希勒問題沒有解的 k_n 數值之外尙存在着特別的數值 $k=k'_n$，方程(7)對於它們是不可解的。k_n 數值的狄銳希勒問題的解也可以利用勢函數來得到。這些問題的述說讀者可在已提過的 В. Д. 庫普拉奇傑的論文中找到。我們在這裏僅注意 k'_n 的數值是實數。由此，特殊的，接着知在所有 k 的複數值時積分方程(7)

❶ 參看，例如，P. O. 庫茲明 (Кузьмин) 所著的貝塞爾函數一書。

是可解的。

在 k 是實數的情況中可能建立解出方程(1)的狄銳希勒問題的並在所有 $k \neq k_n$ 時，即在它的狄銳希勒問題是可解的所有 k 時，有解的積分方程。這些方程的推導是根據給出積分方程(1)的一般形式的公式❶。當 k 是實數時，這公式有下式樣：

$$U(x,y)=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}+\int_0^z H(z,\bar{z},\lambda,k)\varphi(\lambda)d\lambda+$$

$$+\int_0^{\bar{z}} H(\bar{z},z,\lambda,k)\overline{\varphi(\lambda)}d\lambda。\qquad (8)$$

在這裏 $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, $\varphi(z)$ 是一解析函數；最後，

$$H(z,\bar{z},\lambda,k)=-\frac{k}{2}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z-\lambda}}\,J_1(k\sqrt{\bar{z}(z-\lambda)});\qquad (9)$$

J_1 是指號爲 1 的第一種貝塞爾函數。

顯然，若我們求得在公式(8)中的函數 $\varphi(z)$，我們就解出狄銳希勒問題。我們將尋求這函數的柯西型積分式樣

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\qquad (10)$$

我們將設它的密度是實數。重複 § 29 中的討論，我們來到積分方程

$$\mu(t)+\int_L K(t,\zeta)\mu(\zeta)d\sigma=f(s)。\qquad (11)$$

在這裏

$$K(t,\zeta)=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(\nu,r)}{r}+$$

$$+\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_0^t \frac{H(t,\bar{t},\lambda,k)}{\zeta-\lambda}\,d\lambda\right\}。\qquad (12)$$

再者，t 是境界 L 的點，相應於 s 變數的數値，$r=|t-\zeta|$ 且 ν 是在 ζ 點 L 的向外法線的方向。重複 § 29 中的討論，我們容易地證明當 $k\neq k_n$ 時方程(11)是可解的。由這方程求得 $\mu(t)$，我們利用公式(10)及(9)

❶ 這公式的推導見 B[10]。我們把這論文中的符號變了些。

得我們問題的解。

波方程變到積分方程的基本問題的另一方法在 Д. И. 雪爾曼的論文 [37о] 中給出。

§58. 熱勢與它們的應用 限於當溫度是，除時間外，僅與兩個坐標有關的情況，我們能把熱傳導方程寫成下式樣

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}\text{。} \tag{1}$$

與這方程連系着的最簡單的邊界問題是下面的問題：求方程(1)的積分，它與它的一階及二階微商在某區域 D 的所有各點 (x,y) 並在原時刻後所有各時刻都是連續的。所求的積分必須符合下條件：

(a)初時刻的

$$\text{當 } t=0 \text{ 時}\quad U=F(x,y); \tag{2}$$

(б)邊界的

$$\text{在區域 } D \text{ 的境界 } L \text{ 上}\quad U=f(s,t)\text{。} \tag{3}$$

我們將把這問題叫方程(1)的狄銳希勒問題。

我們將設給出的函數 $F(x,y)$ 及 $f(s,t)$ 是充分地平滑的。

僅歸結到這表述的問題有，例如，在截面不變的長管中粘滯液體的流動的研究。

我們將設液體質點的速度是沿着管的方向。這樣，若我們使 z 軸的方向與管平行，則僅在 z 方向的分速度不是零。再者，我們假設這指出的速度不與 z 有關。則，如已知的❶，指出的速度滿足方程(1)。顯然，在管的任一截面中確定它就夠了。這截面也將是區域 D。為了確定在任何時刻時的速度，必須給出初時刻時速度的分佈。用 $F(x,y)$ 表記在 $t=0$ 時在 (x,y) 點的速度，我們來到條件(2)。再者，粘滯液體附貼於管的壁上。由此接着知在截面的境界上速度是等於零；在我們的情況中邊界條件(3)取下式樣：

❶ 見 Н. Е. 柯秦，И. А. 奇貝路及 Н. В. 羅維的理論流體力學一書。

在 L 上 $$U(s,t)=0\text{。}$$

若利用所謂熱勢，我們在上面表述的邊界問題可能引到某積分方程。我們簡略地提述它們的定義和基本性質；詳細的述敘可在，例如，[6]中找到。

我們試用 σ 表記確定在 L 上點的位置的參數的數值，σ 也就是 L 上的點；用 r 表記由 σ 點到 (x,y) 點的距離；接連它們的線段的方向我們將認爲是從 σ 點到 (x,y) 點的。

令 $\mu(\sigma,t)$ 爲當 $t\geqslant 0$ 時及 σ 是在 L 上所確定的函數。我們將設當 $t=0$ 時 $\mu(\sigma,t)=0$，且設 $\mu(\sigma,t)$ 是充分地平滑的。積分

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\mu(\sigma,\tau)}{t-\tau}\frac{\partial}{\partial\nu}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma \qquad (4)$$

我們將叫它偶層熱勢，在境界 L 的裏面及外面的各點它都是確定的。勢(4)也可能用下式樣來表示：

$$U(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\mu(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(\nu,r)d\sigma\text{。}\qquad (5)$$

爲了得到這表示，在積分號求微分就夠了。

函數 $\mu(\sigma,\tau)$ 叫勢的密度。我們注意勢(4)的下面各性質：

(1)在 L 的裏面與外面，$U(x,y)$ 及其各階微商是連續的並滿足熱傳導的微分方程[方程(1)]。

(2)當 $t=0$ 時，勢(4)等於零。

(3)若 (x,y) 點趨向境界點 s，則勢(4)趨向爲下面兩公式所確定的極限值：

$$W_i=-\mu(s,t)+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\mu(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(\nu,r)d\sigma\text{，}\qquad (6)$$

$$W_e=\mu(s,t)+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\mu(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(\nu,r)d\sigma\text{。}\qquad (7)$$

（4）勢（4）的法線微商當跨過境界時是連續的。

我們試從事於熱方程的狄銳希勒問題的解出。不難求得滿足初時刻條件（2）的這方程的積分：為了得到這個在全部平面 (x, y) 上確定 $F(x, y)$ 就夠了，例如，設在 L 外面 $F(x,y)=0$，則已知公式

$$U_0(x, y, t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi\, d\eta,$$

或，考及在 L 的外面 $F(x,y)=0$，

$$U_0(x, y, t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_D F(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi\, d\eta \qquad (8)$$

給出所指的特解。

我們將尋求狄銳希勒問題的如下式樣的解：

$$U(x, y, t)=U_0(x, y, t)+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r\cos(\nu, r) d\sigma\,。\qquad (9)$$

由偶層熱勢的性質（1）及（2）接着知，函數（9）滿足微分方程（1）及初時刻條件（2）。餘下來的是要選取這樣的密度 $\mu(\sigma, \tau)$ 俾能滿足邊界條件（3）。

令 (x, y) 點趨向境界點 s。利用邊界條件（3）及公式（6），我們得具有未知函數 $\mu(\sigma, \tau)$ 的積分方程：

$$\mu(s, t)-\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r\cos(\nu, r) d\sigma=$$
$$=-g(s, t), \qquad (10)$$

其中 $$g(s, t)=f(s, t)-\lim_{(x, y)\to s} U_0(x, y, t)。$$

在下節中我們給出我們所得的積分方程的可解性的證明。在這裏我們作下面的註釋。

1. 利用這同一熱勢也可能解出當區域是位於境界 L 的外面的情況的狄銳希勒問題。與以前一樣，解取（9）的式樣。設 (x, y) 趨向 s 點，我們現在須利用公式（7），這引我們到所謂外狄銳希勒問題的積分

方程:

$$\mu(s,t)+\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\mu(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(\nu,r)d\sigma=$$
$$=g(s,t)。\qquad(11)$$

2．在熱的對流理論中邊界問題起着重要的作用,在這問題中條件(3)爲下式所代替:

在 L 上

$$\frac{\partial U}{\partial\nu}+h(\sigma)U=f(\sigma,\tau),\qquad(12)$$

其中 $h(\sigma)$ 是某連續的正值函數。可由周圍介質中失去(或得來)熱量的長柱體中溫度的研究就歸結到這問題,在這裏在柱體附近的介質在任一時刻的溫度是已知的。這問題可利用單層熱勢來解出,這單層熱勢的式樣是

$$V(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma。\qquad(13)$$

與偶層熱勢的情況一樣,我們將認密度 $\rho(\sigma,\tau)$ 是充分地平滑的,且當 $\tau=0$ 時它等於零。勢(13)滿足熱傳導方程;當 $t=0$ 時它等於零,且跨過境界時它是連續的。它的法線微商在跨過境界時有突變;卽,用 n 表記在 s 點處 L 的向外法線,我們有

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i=\rho(s,t)-$$
$$-\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r,n)d\sigma。\qquad(14)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e=-\rho(s,t)-$$
$$-\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r,n)d\sigma。\qquad(15)$$

解具有條件(12)的邊界問題,我們將求下式樣的 U:

$$U(x,y,t)=U_0(x,y,t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma,\tau)}{(t-\tau)}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma,\qquad(16)$$

其中 U_0 爲公式(8)所確定。利用公式(14)及(15),我們得未知函數 $\rho(\sigma,\tau)$ 的積分方程:

$$\pm\rho(s,t)-\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L\frac{\rho(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r,n)d\sigma+$$

$$+\frac{h(s)}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_L\frac{\rho(\sigma,\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma=$$

$$=f(s,t)-\frac{\partial U_0}{\partial n}-h(s)U_0。\tag{17}$$

正號用於內區域的情況,負號用於外區域的情況。

3. 當區域 D 是複連通的,積分方程(10),(11)及(17)保持它們的原式樣。

4. 我們試設

$$\frac{\cos(r,\nu)}{r}d\sigma=d\alpha。\tag{18}$$

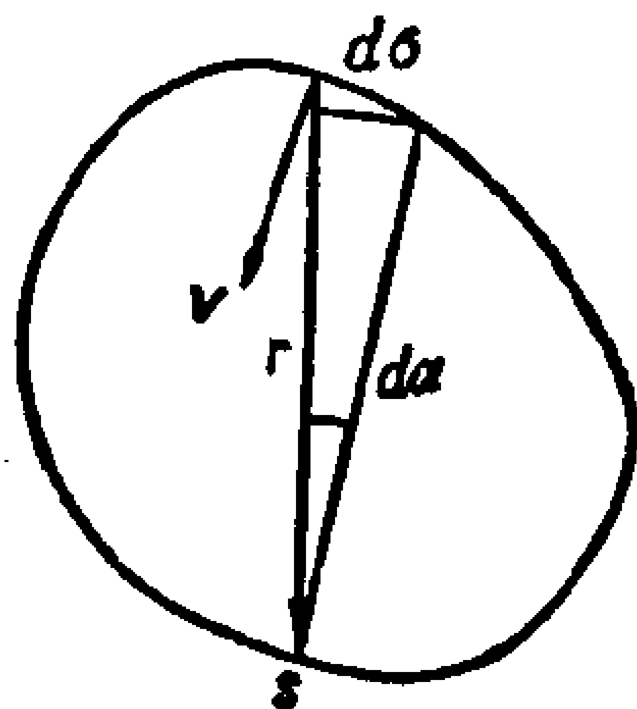


圖 16

不難看出,$d\alpha$ 是由 s 點畫到弧 $d\sigma$ 的兩端的兩無限接近的向徑間所成的角(圖16)。方程(10)可能寫成下式樣:

$$\mu(s,t)-\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L\frac{\mu(\sigma,\tau)}{(\tau-t)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r^2d\alpha=-g(s,t)。\tag{19}$$

在這樣形式中我們的積分方程在境界 L 不是平滑的時仍保有意義。祇要假設積分

$$\int_L|d\alpha|=\int_L\frac{|\cos(\nu,r)|}{r}d\sigma$$

有有限的數值就夠了。

5. 三維空間的熱勢爲下面的公式❶所確定:

單層勢

$$V(x,y,z,t)=\int_0^t d\tau\iint_S\frac{\rho(\sigma,\tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma;\tag{20}$$

❶ 見[8]。

偶層勢

$$U(x, y, z, t)=$$
$$=\int_0^t d\tau \iint_S \frac{\mu(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma。 \tag{21}$$

利用這些勢函數可能把基本的邊界問題引到積分方程，這與我們在平面問題中已作的一樣。

§ 59. 逐次迫近級數的收斂性 在 Г. М. 米有查[6]的專書中已證明過，§ 58 的方程(10)及(11)可能用逐次迫近方法解出。在這裏假設境界 L 是平滑的且有連續曲率。

在這節中我們在境界 L 是弧狀的但不一定是平滑的假定下給出逐次迫近的收斂性的證明。我們所得收斂速率的估計，比起米有查的來說，將是很壞的。然而，我們引出這些壞的估計，因爲在實際應用上不平滑的，特別是多角形的，境界是常常遇到的。

§ 58 的方程(10)及與 § 58 的方程(11)共軛的方程是較一般的方程

$$\mu(s, t)-\frac{\lambda}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha=g(s, t) \tag{1}$$

在 $\lambda=\pm 1$ 時的特別情形。我們試證明若境界 L 是弧狀的且 $|\lambda| \leqslant 1$，則方程(1)的逐次迫近級數是收斂的。

依照逐次迫近方法我們設

$$\mu(s, t)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mu_n(s, t)。 \tag{2}$$

以此代入(1)並比較 λ 的同冪項的係數後，我們得到遞推關係，它允許我們去求函數 $\mu_n(s, t)$：

$$\left.\begin{aligned} \mu_0(s, t)&=g(s, t) \\ \mu_n(s, t)&=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu_{n-1}(s, t)}{(\tau-t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha。\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

令 $|g(s, t)|=|\mu_0(s, t)| \leqslant A_0$，其中 A_0 是某常數。再者，我們設

$|\mu_{n-1}(s,t)|\leqslant A_{n-1}$, A_{n-1} 也是一常數,並作 $|\mu_n(s,t)|$ 的估計。

顯然,我們有

$$|\mu_n(s,t)|\leqslant\frac{A_{n-1}}{4\pi a^2}\int_L d\alpha\int_0^t\frac{r^2}{(\tau-t)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau。$$

作
$$\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}=z$$
的代換,我們容易地求得:

$$\frac{1}{4a^2}\int_0^t\frac{r^2}{(\tau-t)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$$

且從而
$$|\mu_n(s,t)|\leqslant\frac{A_{n-1}}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2}}d\alpha。$$

再者,

$$\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}d\alpha<\frac{1}{\pi}\int_L d\alpha=\frac{\Omega(s)}{\pi}。\tag{4}$$

在這裏我們用 $\Omega(s)$ 表記由 s 點看境界所成的角。顯然,在有一定切線的點上 $\Omega(s)=\pi$,而(因爲境界是弧狀的)在尖點上 $\Omega(s)<\pi$。在任何情況中

$$\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}d\alpha<1。$$

我們設

$$q(t_0)=\max_{0\leqslant t\leqslant t_0}\frac{1}{\pi}\int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}d\alpha。\tag{5}$$

顯然,不管 t_0 是什麽, $q(t_0)<1$, 且

$$|\mu_n(s,t)|<q(t_0)A_{n-1},\quad t\leqslant t_0。\tag{6}$$

爲了要在某時刻 t 考察逐次迫近,我們固定任一 t_0, $t_0\geqslant t$。利用不等式(6),我們求得:

$$|\mu_n(s,t)|<A_0q^n(t_0)。\tag{7}$$

由上一估計接着知在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 時逐次迫近級數的一致收斂性。

若境界 L 是平滑的,具有連續曲率,則 $|\mu_n(s,t)|$ 的估計是這樣

的❶：

$$|\mu_n(s,t)|<\frac{A_0(pt)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\text{。} \tag{8}$$

在這裏 Γ 是尤拉函數，而常數 p 是與境界的式樣有關。

❶ 見[6]。

第五章　對稱積分方程理論的應用

§60. 關於弦的固有振動的問題　我們考究一條長度爲l的不均匀的絃，它在平衡位置時佔據橫坐標的$(0, l)$段並受有張力T的作用。我們將設絃的兩端是固定的。令作用於絃的上面有分佈着的力$F(x, t)$。在此我們了解在t時刻時在絃的$(x, x+dx)$段上作用有等於$F(x, t)dx$的力。再者，我們將設這力是垂直於絃的。絃的橫振動的方程，如已熟知的，有下形式

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x, t), \tag{1}$$

其中$\rho(x)$是在橫坐標的x點處絃的密度。

除方程(1)外，絃離開平衡位置的偏移$u(x,t)$也必須滿足下條件：

(a) 邊界條件

$$u(0, t)=u(l, t)=0, \tag{2}$$

表明絃的兩端是固定的；

(b) 初時刻條件

$$u(x, 0)=f(x), \quad u_t(x, 0)=\varphi(x), \tag{3}$$

其中$\varphi(x)$及$f(x)$是絃的初速度與初偏移。

爲了求絃的固有振動，我們首先解出一附帶的問題。我們求兩端是固定的且是在平衡時的有分佈着的力$F(x)$作用於其上的絃的形狀。在這情況中方程(1)變到絃的平衡方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{T}F(x)=0。 \tag{4}$$

我們考究當全絃除$x=s$一點外沒有荷重，而在s點處有數值上等於一的力集中作用於其上時的特別情況。在我們的情況中當$x\neq s$時$F(x)=0$；在每一個段落$0\leqslant x<s$及$s<x\leqslant l$上方程(4)有下式樣

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0,$$

由此

$$當\ 0\leqslant x<s\ 時\qquad u=\alpha_1x+\beta_1,$$

$$當\ s<x\leqslant l\ 時\qquad u=\alpha_2x+\beta_2。$$

上兩方程示出絃在每一段$(0,s)$及(s,l)上有直線形狀(圖17)。

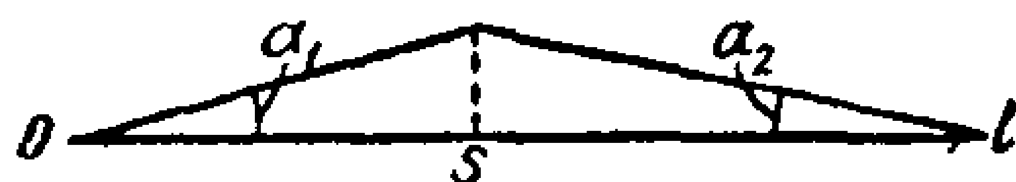


圖 17

因爲絃的兩端是固定的,故等式(2)成立。利用它們,我們求得$\beta_1=0$ 及 $\beta_2=-\alpha_2 l$,且從而,

$$u=\begin{cases}\alpha_1 x & (0\leqslant x<s),\\ \alpha_2(x-l) & (s<x\leqslant l)。\end{cases}$$

餘下的是要求係數 α_1 及 α_2。爲此我們首先注意在 $x=s$ 處絃是連續的,u 的兩個式子必須在這一點合而爲一。這給我們

$$\alpha_1 s=-\alpha_2(l-s)。\qquad (5)$$

再者,絃的兩段的張力的豎直分力的和必須等於一,卽等於作用於 s 點的力的數值:

$$T(\sin\gamma_1+\sin\gamma_2)=1,$$

或,因爲 γ_1 及 γ_2 是很小的,

$$T(\operatorname{tg}\gamma_1+\operatorname{tg}\gamma_2)=1。$$

但是 $\operatorname{tg}\gamma_1=\alpha_1$, $\operatorname{tg}\gamma_2=-\alpha_2$。由此

$$T(\alpha_1-\alpha_2)=1。\qquad (6)$$

由方程(5)及(6)確定 α_1 及 α_2 並把它們代入(4)後,我們得

$$u=\begin{cases}\dfrac{x(l-s)}{lT} & (0\leqslant x\leqslant s),\\[2ex] \dfrac{s(l-x)}{lT} & (s\leqslant x\leqslant l)。\end{cases}$$

我們引入記號

$$G(x, s)=\begin{cases} \dfrac{x(l-s)}{l} & (0\leqslant x\leqslant s), \\ \dfrac{s(l-x)}{l} & (s\leqslant x\leqslant l)。\end{cases} \tag{7}$$

則

$$u=\frac{1}{T}G(x, s)。 \tag{8}$$

爲了以後,注意函數 $G(x, s)$ 的對稱性是重要的:

$$G(x, s)\equiv G(s, x)。 \tag{9}$$

現在不難求得在任意分佈着的力 $F(x)$ 的作用下絃的平衡形狀。事實上,若施於 s 點上的力不等於一,而等於某數值 F,則與之相應的偏移將是等於

$$u=\frac{F}{T}G(x, s)。$$

現在令在絃的 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 點上施予的力是 $F_1, F_2, \cdots, F_n$。則

$$u=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k}{T}G(x, s_k)。$$

過到這等式的極限,我們求得,在依密度 $F(s)$ 分佈着的力的情況中

$$u=\frac{1}{T}\int_0^l G(x,s)F(s)ds。 \tag{10}$$

由公式(10)可容易地求得絃的振動方程。爲此祇要依照達朗貝爾原理在施於絃的 ds 段上的力 $F(s)ds$ 上加一"慣性力" $-\rho(s)ds\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 就夠了。則我們得

$$u(x, t)=\frac{1}{T}\int_0^l G(x, s)F(s)ds-$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^l \rho(s)G(x, s)\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2}ds, \tag{11}$$

卽固定絃的振動的積微分方程,它與微分方程(1)及邊界條件(2)合起來是等價的。力 F 可能與時間有關,這時就必須在方程(11)中寫

$F(s,t)$以代替 $F(s)$。若 $F(s,t)\equiv 0$，則我們得固定絃的固有振動的積微分方程

$$u(x,t)=-\frac{1}{T}\int_0^l \rho(s)G(x,s)\frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2}ds。\tag{12}$$

我們將求這方程的週期性解，卽我們設

$$u(x,t)=v(x)\sin(\nu t+\varepsilon)。\tag{13}$$

以此代入(12)中，我們得知 $v(x)$ 滿足積分方程

$$v(x)-\frac{v^2}{T}\int_0^l \rho(s)G(x,s)v(s)dt=0。\tag{14}$$

若絃是均勻的，則 $\rho(x)=\rho=$常數。在這情況中 $v(x)$ 滿足對稱積分方程

$$v(x)-\mu\int_0^l G(x,s)v(s)ds=0;\quad \mu=\frac{\nu^2\rho}{T}。\tag{15}$$

在一般的情況中方程(14)是不對稱的。然而，若用 $\sqrt{\rho(x)}$乘它並設

$$v(x)\sqrt{\rho(x)}=\varphi(x),\quad G(x,s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}=K(x,s),$$

容易使它變爲對稱的。這樣我們就得到方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l K(x,s)\varphi(s)ds=0;\quad \lambda=\frac{\nu^2}{T},\tag{16}$$

它的核是對稱的。

我們試證明方程(16)的特徵值是正的。令 $\varphi(x)$ 及 λ 滿足方程(16)。設 $\varphi(x)=v(x)\sqrt{\rho(x)}$，我們求得 $v(x)$ 滿足以 λ 代替 $\frac{\nu^2}{T}$ 後的方程(14)：

$$v(x)-\lambda\int_0^l \rho(s)G(x,s)v(s)ds=0。\tag{14$_1$}$$

由(7)顯而易見，當 $x=0$ 時及當 $x=l$ 時 $G(x,s)$ 變成零。但由(14_1)就接着得

$$v(0)=v(l)=0。\tag{17}$$

再者,方程(14)的微分引我們到微分方程

$$v''(x)+\lambda\rho(x)v(x)=0。\tag{18}$$

允許 $v(x)$ 可以是複數,我們用 $\overline{v(x)}$ 乘(18)並積分之:

$$\int_0^l v''(x)\overline{v(x)}dx+\lambda\int_0^l \rho(x)\,|v(x)|^2dx=0。\tag{19}$$

我們用部分積分法取第一個積分。由於等式(17)

$$\int_0^l v''(x)\overline{v(x)}dx=-\int_0^l |v'(x)|^2dx。$$

現在方程(19)給

$$\lambda=\frac{\int_0^l |v'(x)|^2dx}{\int_0^l |v^2(x)|dx}>0。$$

若我們求得方程(16)的特徵值 λ_n,則我們也求得絃的固有振動的頻率等於

$$\frac{\nu_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_nT}。$$

與此相應的特徵函數確定以頻率 $\frac{\nu_n}{2\pi}$ 振動的絃的形狀:

$$v_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\rho(x)}}。$$

對稱方程(16)的特徵函數及特徵值可用上篇第一章中所寫的方法確定。

§61. 密度依照線性律改變的絃的振動 爲了計算有一定起見,我們將設 $l=1$ 及密度 $\rho(x)$ 依照下律改變:

$$\rho(x)=\rho_0(1+x)。\tag{1}$$

則 §60 的方程(14)取下式樣

$$v(x)-\frac{\nu^2\rho_0}{T}\int_0^l (1+s)G(x,s)v(s)ds=0。$$

用 $\sqrt{1+x}$ 乘這方程並設

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\sqrt{1+x}\,v(x),\\ K(x,s)&=\sqrt{(1+x)(1+s)}\,G(x,s);\\ \lambda&=\frac{\nu^2\rho_0}{T}。\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

函數 $\varphi(x)$ 滿足積分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l K(x,s)\varphi(s)ds=0。\tag{3}$$

我們注意在我們的例子中

$$G(x,s)=\begin{cases}x(1-s) & (0\leqslant x\leqslant s),\\ s(1-x) & (s\leqslant x\leqslant 1)。\end{cases}$$

我們試求基音的頻率。爲此祇要確定方程(3)的第一個特徵值就夠了。爲了這目的利用 §15 的方法，用核的跡來給出 λ_1 的式子。依照 §15 的公式(5)

$$A_2=\int_0^1\int_0^1 K^2(x,s)dx\,ds=\int_0^1\int_0^1(1+x)(1+s)G^2(x,s)dx\,ds=$$
$$=2\int_0^1(1+x)(1-x)^2dx\int_0^x(1+s)s^2ds=\frac{127}{5040}。$$

在 §15 的(7_1)的第二個近似公式

$$|\lambda_1|\approx\frac{1}{\sqrt[2m]{A_{2m}}}$$

中，我們令 $m=1$。

在 §60 中已證明過，方程(3)的特徵值是正的。在這樣的情況中

$$\lambda_1\approx\frac{1}{\sqrt{A_2}}=6.300$$

且從而，

$$\nu_1=\sqrt{\frac{T\lambda_1}{\rho_0}}=2.510\sqrt{\frac{T}{\rho_0}}。$$

爲了得到 λ_1 的較準確數值，我們計算二次疊核

$$K_2(x,s)=\int_0^1 K(x,t)K(t,s)dt=$$
$$=\sqrt{(1+x)(1+s)}\int_0^1(1+t)G(x,t)G(t,s)dt。$$

設 $x>s$，試計算核 $K_2(x,s)$。當 $x<s$ 時核 $K_2(x,s)$ 就由它是對稱的條件所確定。我們把積分間隔$(0,1)$分成三段：由零到 s，由 s 到 x 及由 x 到 1。利用已確定的 $G(x,s)$，我們得

$$\int_0^1(1+t)G(x,t)G(t,s)dt=\int_0^s(1+t)t^2(1-x)(1-s)dt+$$
$$+\int_s^x t(1-t^2)s(1-x)dt+\int_x^1(1+t)(1-t)^2xs\,dt=$$
$$=\frac{5}{12}xs-\frac{x^2s}{2}-\frac{s^3}{6}+\frac{xs^3}{6}-\frac{s^4}{12}+\frac{x^4s}{12}+\frac{xs^4}{12}。$$

由此，當 $x>s$ 時，

$$K_2(x,s)=\frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12}(5xs-6x^2s-2s^3+$$
$$+2xs^3-s^4+x^4s+xs^4)。$$

由變數 x 及 s 的簡單掉換我們得當 $x<s$ 時 $K_2(x,s)$ 的數值；當 $x<s$ 時

$$K_2(x,s)=\frac{\sqrt{(1+x)(1+s)}}{12}(5xs-6xs^2-2x^2+$$
$$+2x^3s-x^4+xs^4+x^4s)。$$

現在

$$A_4=\int_0^1\int_0^1K_2^2(x,s)dx\,ds=2\int_0^1dx\int_0^xK_2^2(x,s)ds=0.0006154。$$

在 §15 的(7_1)的第二個公式中我們現在令 $m=2$。則

$$\lambda_1\approx\frac{1}{\sqrt[4]{A_4}}=6.349。$$

這是嫌不足的 λ_1 數值。用 §15 的(7_1)的第一個公式，我們得嫌過剩的數值。對 $\lambda_1>0$ 說這公式有下式樣

$$\lambda_1\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}。$$

在這公式中令 $m=1$。則

$$\lambda_1\approx\sqrt{\frac{A_2}{A_4}}=6.398。$$

λ_1的準確數值是被包在6.349及6.398兩數之間。注意這一點是有趣味的:就是較粗糙的公式

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}$$

給出 λ_1 的數值所具的誤差也已小於2%。

有了 A_2 及 A_4 的數值我們也可能計算第二個特徵值 λ_2。爲此利用§17的近似公式(6):

$$|\lambda_2| \approx \frac{1}{|\lambda_1|} \sqrt[2m]{\frac{2}{B_{2m}}}, \quad B_{2m} = A_{2m}^2 - A_{4m}。$$

令 $m=1$ 並注意 $\lambda_2>0$,我們有:

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{A_2^2 - A_4}} = 49.9。$$

§62. 影響函數(格臨函數) 與影響函數的概念相連系着的問題的詳細敍述讀者可在很多著名的教程中找到。我們舉例指出庫琅特及希爾伯脫[4],В. И. 斯米爾諾夫[8],И. И. 普里瓦洛夫[7]等書。所以我們在這裏僅限於寫影響函數的定義及其基本性質。

我們試從最簡單的情況開始。令給出普通二級線性微分算子

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y, \tag{1}$$

其中 $p(x) \geqslant 0$。我們將研究這樣的函數 $y(x)$,它在給出的間隔 (a, b) 的兩端滿足條件

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{2}$$

而在這間隔之內它是連續的並有連續的一階微商。二階微商 $y''(x)$ 受有唯一性的條件,俾使 $L(y)$ 有意義。我們設這些函數中,除掉函數 $y(x) \equiv 0$,沒有一個使算子 $L(y)$ 變成零。換言之,我們設方程

$$L(y) = 0 \tag{3}$$

的唯一積分滿足條件(2)並與其微商同爲連續的是 $y \equiv 0$。具有下列性質的兩個變數的函數 $G(x, s)$就叫作在邊界條件(2)下的算子 $L(y)$

的影響函數，或格臨函數：

（1）在 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $a\leqslant s\leqslant b$ 中 $G(x,s)$ 是連續的。

（2）在間隔 $a\leqslant x<s$ 及 $s<x\leqslant b$ 的每一個中微商 $\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial G(x,s)}{\partial s}$ 是連續的。

（3）在 $x=s$ 點微商 $\frac{\partial G(x,s)}{\partial s}$ 遭受突變，這跳變爲公式

$$\left.\frac{\partial G(x,s)}{\partial s}\right|_{x=s+0}-\left.\frac{\partial G(x,s)}{\partial s}\right|_{x=s-0}=\frac{1}{p(s)} \qquad (4)$$

所確定。

（4）當 s 是固定時 $G(x,s)$ 在間隔 $a\leqslant x<s$ 及 $s<x\leqslant b$ 的每一個中滿足方程（3）

$$L(G)=0。$$

（5）當作 x 的函數看，$G(x,s)$ 滿足邊界條件（2）。

格臨函數可能用下法建立。

我們試建立方程（3）的積分 $u(x)$ 及 $v(x)$，它們滿足柯西條件

$$u(a)=\beta,\quad u'(a)=-\alpha,$$
$$v(b)=\delta,\quad v'(b)=-\gamma。$$

顯然，$u(x)$ 也滿足邊界條件(2)的第一個，而 $v(x)$ 也滿足邊界條件(2)的第二個。積分 $u(x)$ 及 $v(x)$ 是線性無關的，否則就應有方程（3）的積分它同時滿足兩個邊界條件（2），而這是與我們的假設相矛盾的。

從線性微分方程的理論知有恆等式

$$p(x)[u(x)v'(x)-u'(x)v(x)]=-c。 \qquad (5)$$

常數 c 不是零，否則 $u(x)$ 及 $v(x)$ 就應是線性相關的。

建立了積分 $u(x)$ 及 $v(x)$ 後，我們能立刻寫出格臨函數的式子，即

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{u(x)v(s)}{c} & (a\leqslant x\leqslant s),\\ \dfrac{u(s)v(x)}{c} & (s\leqslant x\leqslant b)。\end{cases} \qquad (6)$$

不難證驗,函數(6)具有格臨函數定義中所說的性質1—5。

由公式(6)直接得 $G(x,s)$是對稱函數,即

$$G(x,s)\equiv G(s,x)。\tag{7}$$

事實上,令,例如, $x<s$。則 $G(x,s)=\frac{1}{c}u(x)v(s)$。計算$G(s,x)$,我們必須取(6)中的下一行,因爲第一個變數 s 是大於第二個。於是就有

$$G(s,x)=\frac{1}{c}u(x)v(s)=G(x,s)。$$

爲格臨函數性質的應用的第二個要點爲下面定理所表出:

非齊次方程

$$L(y)=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=-f(x)\tag{8}$$

的積分,滿足邊界條件(2)的,爲公式

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)ds\tag{9}$$

所確定。解(9)是唯一的。

這定理的證明讀者可在本節開頭時所提的教程中找到。

不難信服在§60中所建立的函數 $G(x,s)$ 就是在邊界條件 $y(0)=$ $=y(l)=0$ 下算子 $L(y)=y''$ 的影響函數。

公式(9)允許給出影響函數的簡單而有用的解釋。在方程(8)中我們將拿 $f(x)$ 當作分佈着的力,而拿 $y(x)$ 當作這力所致對平衡位置說 x 點的位移。在這種情況中 $G(x,s)$ 是施於點 s 上的數值等於一的集中力所致 x 點的位移。事實上,我們試設在 $(s-\varepsilon,s+\varepsilon)$ 段上作用有這樣分佈着的力 $f(x)$,使它的合向量等於一:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}f(x)dx=1。\tag{10}$$

令$(a,s-\varepsilon)$ 及$(s+\varepsilon,b)$段上沒有力的作用,這樣使在這兩段上 $f(x)=0$。在公式(9)中在$(a,s-\varepsilon)$及$(s+\varepsilon,b)$兩段上的積分消去,我們就有

$$y(x)=\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} G(x,t)f(t)dt。$$

設 $f(t)>0$,我們可用積分中值定理:

$$y(x)=G(x,s')\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f(t)dt=G(x,s'),\quad s-\varepsilon<s'<s+\varepsilon。$$

令 $\varepsilon\to0$,我們來到施於 s 點的並由於等式(10)是等於一的集中力的情況。再者 $s'\to s$ 且,因為 $G(x,s)$是連續的,故在極限時

$$y(x)=G(x,s),$$

這也是所需要證明的。

在振動理論及穩定性理論的問題中常常要解下面的問題。給出了微分方程

$$L(y)+\lambda r(x)y=0 \tag{11}$$

或,更詳細地,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+[q(x)+\lambda r(x)]y=0,$$

其中 $r(x)$ 是一連續的正值的函數而 λ 是數值不事先給出的參數。需要求 λ 的那些個數值,它們使方程 (11) 有連續的,且具有連續微商的,又不恆等於零的且滿足邊界條件(2)的積分。知道格臨函數,我們能利用公式(9)把指出的問題引到具有對稱核的積分方程的特徵值的尋求。為此我們注意,若設 $f(x)=\lambda r(x)y(x)$,則方程(11)變到(8)。因為所尋求的積分滿足條件(2),故可能應用公式(9):

$$y(x)=\lambda\int_a^b r(s)G(x,s)y(s)ds。 \tag{12}$$

等式(12)是具有未知的 $y(x)$ 及參數 λ 的齊次積分方程;除掉當 $r(x)=$ =常數的情況,它是不對稱的。為了使它變成對稱的,我們用$\sqrt{r(x)}$乘它的兩邊並設

$$\sqrt{r(x)}y(x)=\varphi(x),\quad \sqrt{r(x)r(s)}G(x,s)=K(x,s)。$$

我們就得方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0, \tag{13}$$

它的核已是對稱的。顯然,這方程的特徵值也是所尋求的 λ 的數值。

注意這點是有用的：方程 (13) 的所有特徵值都是簡單的,這也就是說與它們的每一個相對應的僅有一個特徵函數。爲了信服這點,我們試假設與特徵值 λ' 相應的有兩個線性無關的函數 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$。我們試組成函數

$$y_1(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{r(x)}},\quad y_2(x)=\frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{r(x)}}。$$

當 $\lambda=\lambda'$ 時這兩函數滿足積分方程 (12)。由此接着知它們滿足同一微分方程

$$L(y)=\lambda' r(x)y=0$$

及邊界條件(2)。我們注意這兩個條件中的第一個：

$$\alpha y_1(a)+\beta y_1'(a)=0,\quad \alpha y_2(a)+\beta y_1'(a)=0。$$

因爲 α 及 β 兩數值不同時等於零,故

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}=0。$$

寫出的行列式是積分 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 在 $x=a$ 點的弗琅行列式的數值。在一點既等於零,它就恆等於零。由此接着知 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$是線性相關的。於是 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 就也是線性相關的,這與假設是相矛盾的。

格臨函數的概念伸延到較高級的及具有多個獨立變數的方程。例如,拉普拉斯方程的這種格臨函數爲區域 M 及 M_1 中兩點所確定的函數;當 $M=M_1$ 時它有對數奇性❶,當 $M\neq M_1$ 時它是調和的,在區域的境界上它是等於零的。

§ 63. 棒的扭轉振動。有聚集質量情況的計算 棒的扭轉振動的

❶ 我們試考究兩個獨立變數的情況。

微分方程有下式樣

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[GI_p\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]-I_m\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0。\qquad(1)$$

在這裏 θ 是扭轉角，I_m 是對剛性軸說棒的轉動慣量，GI_p 是棒的扭轉剛性。我們將考究一端固定一端自由的棒的週期性振動。令 $x=0$ 的一端是固定的，另一端 $x=l$ 是自由的。則棒的兩端的條件將是

$$\text{當 } x=0 \text{ 時,}\qquad \theta=0;$$

$$\text{當 } x=l \text{ 時,}\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}=0。\qquad(2)$$

尋求週期性的解，我們設

$$\theta(x,t)=e^{i\nu t}\vartheta(x)。$$

以此代入(1)，我們求得 $\vartheta(x)$ 滿足普通的微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[GI_p\frac{d\vartheta}{dx}\right]+\lambda I_m\vartheta=0;\quad \lambda=\nu^2。\qquad(3)$$

由(2)得出 $\vartheta(x)$ 所滿足的邊界條件：

$$\vartheta(0)=0;\quad \vartheta'(l)=0。\qquad(4)$$

顯然，我們僅對不恆等於零的函數 $\vartheta(x)$ 有興趣：若 $\vartheta(x)\equiv 0$，則也就 $\theta(x,t)\equiv 0$，即振動實際上不存在。這樣，我們來到上一節中所表述的問題的特別情況：必須求使 $\vartheta(x)$ 滿足方程(3)及條件(4)且不恆等於零的 λ 的數值。如我們已經知道的，這問題歸結到積分方程。

我們試建立與之相應的格臨函數。試用 $H(x,s)$ 表記它。它滿足微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[GI_p\frac{dy}{dx}\right]=0.$$

這方程有線性無關的積分

$$u(x)=\int_0^x\frac{dx}{GI_p},\quad v(x)=1,$$

它們滿足條件 $u(0)=0$, $v'(l)=0$。再者，在我們的情況中 $p(x)=GI_p$，及

$$p(x)[uv'-vu']=-1。$$

由此 $c=1$ [§62 的公式(5)]且從而，

$$H(x,s)=\begin{cases}\int_0^x \frac{dx}{GI_p} & (0\leqslant x\leqslant s),\\ \int_0^s \frac{dx}{GI_p} & (s\leqslant x\leqslant l)。\end{cases} \tag{5}$$

$\vartheta(x)$的積分方程有下式樣

$$\vartheta(x)-\lambda\int_0^l H(x,s)I_m(s)\vartheta(s)ds=0。 \tag{6}$$

用$\sqrt{I_m(x)}$乘它並引入相應的表記，我們把它變成具有對稱核的方程。

方程(6)顯示出轉動慣量 $I_m(x)$ 沿着棒連續地改變的假設。然而，能發生的是棒上帶有一些聚集的質量。則方程(6)的式樣就變了。特例地說，若有 n 個聚集質量佈置於棒上的 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 各點上，它們的轉動慣量是 $I_1, I_2, \cdots, I_n$，則代替(6)我們有：

$$\vartheta(x)-\lambda\int_0^l H(x,s)I_m(s)\vartheta(s)ds-\lambda\sum_{k=1}^n H(x,s_k)I_k\vartheta(s_k)。 \tag{7}$$

可以示明的是希爾伯脫-施密特的理論完全可推廣到(7)型的方程上。在 И. В. 安娜尼娃[9]及 А. И. 柯曼[16]的工作中給出(7)型的方程在具有聚集的荷重的翼片的振動問題中的應用。關於頻率的計算這兩作者主要地利用克洛格的方法。

§ **64**. **壓縮棒的剛性(棒的縱向彎曲)**　如已知道的，棒的撓曲的彈性線的方程有下式樣

$$\frac{d}{dx}\left[EI\frac{dy}{dx}\right]=M,$$

其中 I 及 M 是在橫坐標 x 處的截面的轉動慣量及撓矩，E 是楊氏模量。我們試考究當棒是在它的兩端受壓的情況。我們試用 P 表記這二力的每一個的數值。則 $M=-Py$，及撓曲的軸的方程將是

$$\frac{d}{dx}\left[EI\frac{dy}{dx}\right]+Py=0。 \tag{1}$$

棒的兩端在與棒垂直的方向上不移動,所以,用 l 表記棒的長度,我們有

$$y(0)=y(l)=0。 \tag{2}$$

我們用 E 除方程(1)並設 $\frac{P}{E}=\lambda$。則

$$\frac{d}{dx}\left[I\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0。 \tag{3}$$

我們試用 $G(x,s)$表記相應於邊界條件(2)的算子

$$\frac{d}{dx}\left[I\frac{dy}{dx}\right]$$

的格臨函數。則(見§62)

$$y(x)-\lambda\int_0^l G(x,s)y(s)ds=0。 \tag{4}$$

這樣,受壓棒的彎曲 $y(x)$ 滿足具有對稱核的齊次積分方程。在隨意地取力 P 時 $\lambda=\frac{P}{E}$ 的數值將不是特徵值,這時 $y(x)\equiv 0$。換言之,隨意地取壓縮力使棒保留直線狀。僅在 $P=\lambda_n E$ 的情況中,其中 λ_n 是方程(4)的特徵值, $y(x)$ 能不是零,這時棒就變曲,失去它的穩定剛性。

在縱向彎曲的問題中重要的是確定能使棒失去穩定剛性的最小力 P。這所謂臨界力是等於楊氏模量與方程(4)的最小特徵值的乘積。為實用的目的,可用嫌不足的近似公式以給出 λ 就夠了:

$$\lambda_1\approx\frac{1}{\sqrt{A_2}};\qquad A_2=\int_0^l\int_0^l G^2(x,s)dx\,ds。 \tag{5}$$

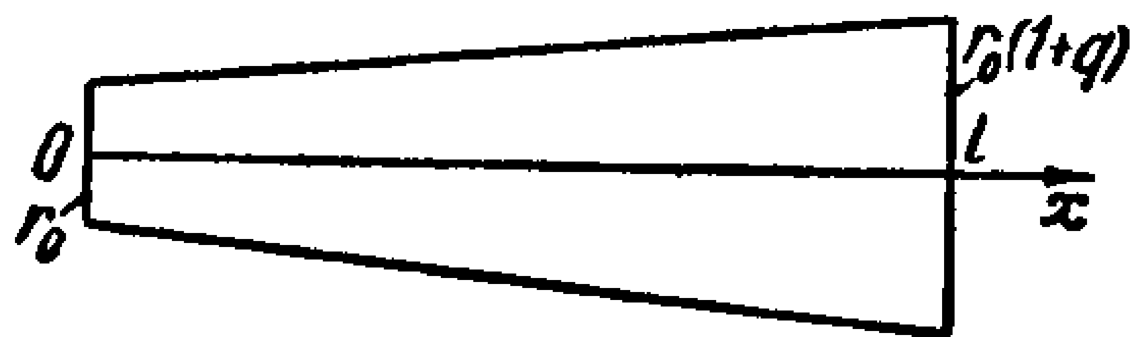


圖 18

我們試求,例如,式樣是錐體的一段的棒的臨界力。我們試用 r_0 及 $r_0(1+q)$ (圖 18) 表記半徑。則在橫坐標 x 處的截面的半徑將是 $r_0\left(1+\frac{qx}{l}\right)$,而這截面的轉動慣量將是

$$I=\frac{\gamma r_0^4}{2}(1+\alpha x)^4, \tag{6}$$

其中 γ 是棒的密度且 $\alpha=\frac{q}{l}$。我們試用下式樣把方程(3)重新寫出

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4\frac{dy}{dx}\right]+\mu y=0; \quad \mu=\frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}。 \tag{7}$$

若 $G(x,s)$是在邊界條件(2)時的算子

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4\frac{dy}{dx}\right]$$

的格臨函數,則 $y(x)$ 滿足積分方程

$$y(x)-\mu\int_0^l G(x,s)y(s)ds=0。 \tag{8}$$

我們必須確定它的最小特徵值。

我們試求格臨函數 $G(x,s)$。方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4\frac{dy}{dx}\right]=0$$

有通積分

$$y=C_1+\frac{C_2}{(1+\alpha x)^3}。$$

積分

$$u(x)=1-\frac{1}{(1+\alpha x)^3}$$

滿足條件 $y(0)=0$,而積分

$$v(x)=\frac{1}{(1+\alpha x)^3}-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}$$

滿足條件 $y(l)=0$。再者,

$$c=-p(x)[u(x)v'(x)-u'(x)a(x)]=3\alpha\left(1-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right),$$

且我們得格臨函數的式子:

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{c}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha x)^3}\right]\left[\frac{1}{(1+\alpha s)^3}-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right](0\leqslant x\leqslant s),\\ \frac{1}{c}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha s)^3}\right]\left[\frac{1}{(1+\alpha x)^3}-\frac{1}{(1+\alpha l)^3}\right](s\leqslant x\leqslant l)。\end{cases}$$

近似公式

$$\frac{1}{\mu_1^2}\approx\int_0^l\int_0^l G^2(x,s)dx\,ds=2\int_0^l dx\int_0^x G^2(x,s)ds$$

確定方程(8)的最小特徵值 μ_1。計算這寫出的積分是十分初級的。然而，所得的公式是足夠煩厭的。爲了使它簡單化，我們祇限於考察當 q 的數值小且可能略去含有 q 的冪比一高的各項的情況。作出在這簡單化假設下的計算，我們得

$$\frac{1}{\mu_1^2}=l^4\left(\frac{1}{90}-\frac{2}{45}q\right)。\tag{9}$$

由此我們容易地求得臨界力 P。注意 $\lambda=I_0\mu$，其中 I_0 是在 $x=0$ 處截面的轉動慣量，我們求得臨界力的式子的下式樣

$$P=E\lambda_1=\frac{\sqrt{90}\,EI_0}{l^2}(1+2q)=\frac{9.487\,EI_0}{l^2}(1+2q)。\tag{10}$$

若設 $q=0$，則得具有不變的截面的棒。在這情況中公式(10)給出臨界力的數值是

$$P=\frac{9.487\,EI_0}{l^2}。$$

如已知道的，在這情況中臨界力的確值是等於

$$\frac{\pi^2EI_0}{l^2}=\frac{9.897\,EI_0}{l^2}。$$

近似值比確值小了 5%。

與此相同的引到積分方程的方法也利用去求在較複雜的情況中的臨界力。特例地說，在方向是在板平面中的力的作用下彈性板的穩定剛性的問題能引到積分方程[18]。Н. В. 茲沃林斯基在他的論文[14]中利用積分方程解出柱體殼的穩定剛性的問題。在後兩情況中核是不對稱的，但它是屬於所謂可對稱化的一類，在這類中實數特徵值的存在定理是正確的。

§ 65. 在彈性半空間上剛堅的衝體的壓力　我們試考究半空間 $z<0$。我們設有一絕對剛堅的物體(我們將稱這物體爲衝體)壓在這半

空間的 $z=0$ 平面上的 S 部分上，這樣以平行於 z 軸的力 Q 壓於半空間上。假定半空間與衝體間的摩擦力不存在。餘下的部分 S' 沒有外力的作用。要求的是確定在半空間中的應力場與位移場，並也建立作用於衝體上的力與它的移動間的關係。

我們所表述的問題，名叫"衝體壓力的問題"，已引出廣泛的文獻。我們將在第六章中考究與它相類似的平面問題。在這裏我們敘述半空間上衝體的壓力問題的解，這解建立在把它引到某個第一種積分方程的基礎上。

這個解是 B. И. 多福羅若飛奇在他的論文[39]中得到的。

我們試表述我們的問題的方程及邊界條件。

我們試用 u, v, w 表記彈性位移的向量的分量。不考慮徹體力，我們能認爲 u, v, w 滿足彈性理論的已知方程：

$$\begin{aligned} \Delta u+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial x}&=0,\\ \Delta v+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial y}&=0,\\ \Delta w+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial z}&=0,\\ \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&+\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}\tag{1}$$

其中 σ 是卜阿松係數。與這些方程相伴的邊界條件是這樣的。

在 S' 上沒有外力，而在 S 上沒有摩擦，所以在全部 xy 平面上我們有

$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0,\quad z=0。\tag{2}$$

再者，顯然，

$$\text{在 } S' \text{ 上}\qquad \sigma_z=0。\tag{3}$$

令 $z=\varphi(x, y)$ 是衝體與半空間相接觸的部分的曲面的方程。則

$$\text{在 } S \text{ 上}\quad w=ax+by+c-\varphi(x, y)=\Phi(x, y),\tag{4}$$

其中 $ax+by+c$ 的數値表徵衝體的剛體移動。我們注意,依照微小形變的假設,假定常數 a, b, c 及函數 $\varphi(x, y)$ 是小的。最後,我們設在無窮遠處位移是有限的,而應力是消失了的。

這樣,衝體壓力的問題便歸結到在邊界條件(2)—(4)下方程(1)的積分。在問題的解中常數 a, b, c 留下爲不知的:解出這問題後可能依下面的方法由衝體的平衡條件來確定它們:命壓於衝體上的力 Q 是沿着 z 軸作用的。則

$$\iint_S \sigma_z\,dx\,dy=Q, \tag{5}$$

$$\iint_S x\sigma_z\,dx\,dy=\iint_S y\sigma_z\,dx\,dy=0。$$

我們試開始走向我們的問題的解出。如已知的[1],滿足方程組(1)的函數 u, v, w 可以由下式樣表示出

$$u=\varphi_1+z\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad v=\varphi_2+z\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad w=\varphi_3+z\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ 是調和函數,它們之間有下關係

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\frac{1}{3-4\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)。$$

我們的問題的邊界條件允許[2]把任務引到僅一個滿足下面邊界條件的函數 φ_3:

$$在\ S\ 上\qquad \varphi_3=\Phi(x, y), \tag{6}$$

$$在\ S'\ 上\qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=0。 \tag{7}$$

我們將設衝體的曲面是充分平滑的,俾使 $\Phi(x, y)$ 是可以兩次連續地微分的。所以,特別地說,我們設衝體的曲面上是沒有稜邊的。在下面我們主要地將依靠 C. 蔡袁卜[40]的結果。從這裏特例地得出,若函數

[1] E. 崔夫兹,彈性的數學理論,ГТТИ, 1932。

[2] 見福琅克及米塞斯,數學物理的微分與積分方程,ГТТИ, 1937,第 290—292 頁。

$\Phi(x,y)$ 僅是充分平滑的，在 $z<0$ 的半空間中是調和的且可用可連續地微分的單層密度的勢的形式來表示的滿足邊界條件（6）及（7）的函數 $\varphi_3(x,y,z)$ 是存在的。我們注意由 $\varphi_3(x,y,z)$ 的可用單層勢來表示的性質得出這函數在全部 XY 平面上是連續的，在區域 S 及 S' 的邊界上它的數值是所設的。

知道這點，我們將由下式樣求 φ_3

$$\varphi_3(x,y,z)=\iint\limits_S \mu(\xi,\eta)\,\frac{d\xi d\eta}{r}, \tag{8}$$

其中 $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2$。在面積 S 的外面，特例地在 S' 上，勢（8）可能在積分號下求微分。再者，

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=-2z\iint\limits_S \mu(\xi,\eta)\,\frac{d\xi d\eta}{r^3},$$

在 S' 上它變爲零。這樣，勢（8）自然滿足條件（7）。

再者，邊界條件（6）給：

$$\text{在 } S \text{ 上}\qquad \iint\limits_S \frac{\mu(\xi,\eta)}{r}\,d\xi d\eta=\Phi(x,y)。 \tag{9}$$

這是具有未知函數 $\mu(\xi,\eta)$ 的第一種積分方程。因爲在 S 上 $z=0$，故它的核

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

是對稱的。由於在上面所敍述的 C. 蔡袁卜的結果方程（9）是可解的。再者它有唯一的解，否則就存在着某個連續的，在 $z<0$ 時是調和的，滿足邊界條件（6）及（7）的函數，而這，如已知的，是不可能的。

核 $\frac{1}{r}$ 有弱奇性。然而，我們證明，對這核說希爾伯脫-施密特定理仍有效，祇是 §13 的級數（8）一般地說將不一致收斂，而僅爲均值收斂❶。

我們通常表記

❶ 關於均值收斂性，參閱 §20。

$$\iint\limits_S \frac{\mu(\xi,\eta)}{r}\,d\xi\,d\eta = K\mu。$$

由 §10 的定理 I 接着知關於核 $\frac{1}{r}$ 的二次疊核，將僅是對數無窮大，所以對它說希爾伯脫-施密特定理將是正確的。我們試用 λ_i 及 $\varphi_i(\xi,\eta)$ 表記對稱核 $\frac{1}{r}$ 的特徵值及特徵函數；則 λ_i^2 及 $\varphi_i(\xi,\eta)$將是二次疊核的特徵值及特徵函數。根據希爾伯脫-施密特定理

$$K^2\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^2}\varphi_k(x,y);$$

$$a_k = (\mu,\varphi_k) = \iint\limits_S \mu(\xi,\eta)\varphi_k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{10}$$

在這裏若僅積分

$$\iint\limits_S |\mu^2(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta = \|\mu\|^2$$

存在，右端部分的級數一致收斂。

我們試表記

$$\mu_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x,y)$$

並考究數量積

$$(K^2(\mu-\mu_n),\ \mu-\mu_n)。 \tag{11}$$

依照布里亞柯夫斯基-施窪而茨不等式，我們有

$$\|(K^2(\mu-\mu_n),\ \mu-\mu_n)\| \leqslant \|K^2(\mu-\mu_n)\|\cdot\|\mu-\mu_n\| =$$
$$= \|K^2\mu - K^2\mu_n\|\cdot\|\mu-\mu_n\|。$$

再者，

$$K^2\mu_n = K^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k K^2\varphi_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\lambda_k^2}\varphi_k。$$

級數(10)一致收斂，所以 $K^2\mu_n$ 一致收斂於 $K^2\mu$；又更有

$$\|K^2\mu - K^2\mu_n\| \to 0。$$

$\|\mu-\mu_n\|$ 的數值是有界的。事實上，依照三角形不等式

$$\|\mu-\mu_n\| \leqslant \|\mu\| + \|\mu_n\| = \|\mu\| + \|\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$$

及，由於貝塞耳不等式

$$\|\mu-\mu_n\| \leqslant 2\|\mu\|。$$

由此接着知，(11)的數值趨於零。另一方面，因爲核 $\frac{1}{r}$ 是對稱的，故根據 §11 的公式(3)

$$(K^2(\mu-\mu_n),\ \mu-\mu_n) = (K(\mu-\mu_n),\ K(\mu-\mu_n)) =$$
$$= \|K(\mu-\mu_n)\|^2 = \|K\mu - K\mu_n\|^2。$$

由此接着知，$K\mu_n$ 均值收斂於 $K\mu$。但是

$$K\mu_n = K\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k K\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k。$$

這樣，

$$K\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k; \tag{12}$$

無窮級數的和認爲是它的部分和在均值收斂的意義下的極限。等式(12)表示出核 $\frac{1}{r}$ 的希爾伯脫-施密特定理❶。

我們轉到方程(9)。如已注意了的，它的解是唯一的。由此接着知，核 $\frac{1}{r}$ 的特徵函數系是完整的。事實上，令函數 $\omega(x, y)$ 是與所有 $\varphi_k(x, y)$ 函數正交的。則根據公式(12)，$K\omega \equiv 0$。因爲齊次方程(9)的解是唯一的，故與之相應的齊次方程僅有零解，所以必須有 $\omega(x, y) \equiv 0$。既然函數系 $\varphi_k(x, y)$, $k=1, 2, \cdots$, 是完整的，所求 $\mu(\xi, \eta)$ 及自由項 $\Phi(x, y)$ 就可能分解成級數

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(\xi, \eta), \quad a_k = (\mu, \varphi_k),$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k\varphi_k(x, y), \quad \Phi_k = (\Phi, \varphi_k)。$$

---

❶ 討論略經改變後，可能證明，對具有弱奇性的任一對稱核來說希爾伯脫-施密特定理是正確的。

以此代入(9)中並利用公式(12),我們得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k\varphi_k(x,y),$$

由此 $a_k=\lambda_k\Phi_k$,且我們得下式樣的解

$$\mu(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\Phi_k\varphi_k(\xi,\eta)。\tag{13}$$

這樣,任務便歸結到對稱核 $\frac{1}{r}$ 的特徵值及特徵函數的計算。這可能用上篇的第二章中所敍述的方法作出。為了驗證級數(13)的實驗合用性, B. И. 多福羅若飛奇計算了形狀是旋轉拋物體的衝體的這級數的頭六項。與正確解相比較示出確定壓力 Q 的誤差約為 2.25%。

第六章　奇性積分方程理論的一些應用

§66. 希爾伯脫問題　我們將考究下面的問題：求在某平面區域 D 中是調和的函數，假設在境界的一些部分上所求函數的數值是已給出的，而在境界的另一些部分上它的法線微商的數值是已給出的❶。

爲了簡單起見，我們設將組成境界 L 的每個連端點在內的曲線段看成弧，在這些弧上函數和它的法線微商都是已知的。

我們用 $\gamma_1, \gamma_3, \cdots, \gamma_{2n-1}$ 表記所求調和函數 $U(x, y)$ 已給出的各境界弧，並令在這些弧上

$$U=f(s), \tag{1}$$

其中 s 是境界弧的長度。再者，我們用 $\gamma_2, \gamma_4, \cdots, \gamma_{2n}$ 表記那些法線微商已給出的各境界弧，並令在這些弧上

$$\frac{\partial U}{\partial n}=f_1(s), \tag{2}$$

其中 n 是境界的向外法線。問題歸於函數 $U(x, y)$ 的尋求，這函數在區域中是調和的，在境界上滿足等式(1)及(2)。

我們用 α_k 及 β_k 表記弧 γ_{2k} 的開端與尾端。則，顯然，β_k 及 α_{k+1} 是弧 γ_{2k+1} 的開端與尾端。我們將不事先假定 $U(x, y)$ 在 α_k 及 β_k 點是連續的。則，如我們看出，希爾伯脫問題允許有無數多個依賴於某些參數的解。可能由這些參數的選擇使 $U(x, y)$ 成爲連續的。

我們試變換條件(2)。我們用 $V(x, y)$ 表記與 $U(x, y)$ 共軛的函數。由於柯西-黎曼方程，

$$\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial n}。$$

---

❶　這問題表示出是希爾伯脫的一般問題的特別情況。希爾伯脫的一般問題是尋求調和函數，其給出的條件是在境界上已知這函數與其法線微商的線性組合。

由此我們能確定在弧 γ_{2k} 上 $V(x, y)$ 的數值：

在 γ_{2k} 上 $$V(x, y)=\int_{\alpha_k}^{s}\frac{\partial V}{\partial s}ds+C_k=\int_{\alpha_k}^{s}f_1(s)ds+C_k。$$

我們表記

$$\int_{\alpha_k}^{s}f_1(s)ds=f^*(s)。$$

現在希爾伯脫問題能這樣地被表述：求在區域 D 中解析的函數，在境界的一些部分上這函數的實數部分的數值已給出，而在境界的另一些部分上它的虛數部分已給出：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 }\gamma_{2k-1}\text{ 上} && U=f(s),\\ &\text{在 }\gamma_{2k}\text{ 上} && V=f^*(s)+C_k,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中 C_k 是隨意常數。

我們設 $U+iV=\varphi(z)$ 及令 $T(z;\zeta)$是區域的施窪而茨核（見§41）。則

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L U(\sigma)T(z;\zeta)d\sigma+iC,\tag{4}$$

其中 C 是某常數；L 是區域 D 的境界。顯然，若我們求得在弧 γ_{2k} 上 $U(\sigma)$的數值，函數 $\varphi(z)$ 就知道了，而我們的問題就解出了。

我們試把（4）中的積分分爲兩個：一個依照弧 $\gamma_1, \gamma_3, \cdots, \gamma_{2n-1}$ 分佈着，第二個依照弧 $\gamma_2, \gamma_4, \cdots, \gamma_{2n}$ 分佈着。由於條件（1），第一個積分是已知的數值，它等於

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k-1}}f(\sigma)T(z;\zeta)d\sigma。$$

爲了簡短起見我們用 $\omega(z)$ 表記這積分，這樣就

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}U(\sigma)T(z;\zeta)d\sigma+\omega(z)+iC。$$

令 t 爲某弧 γ_{2m} 的一點，相應於弧長 s。在末一等式中設 $z\to t$，我們過到極限。爲了作出右邊的積分過到極限，利用 §41 的公式(27)：

$$\frac{1}{2\pi}T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta-z}+P(z;\zeta)d\sigma。$$

現在

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}\frac{U(\sigma)d\zeta}{\zeta-z}+\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}U(\sigma)P(z;\zeta)d\sigma+\omega(z)+iC。$$

因爲函數 $P(z;\zeta)$是連續的，在第二項中可能在積分號下取極限。第一項是柯西型積分，它的極限用 §22 的公式(2)來確定。這樣，我們有

$$\varphi(t)=U(s)+\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}\frac{U(\sigma)d\zeta}{\zeta-t}+\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}U(\sigma)P(t;\zeta)d\sigma+$$
$$+\omega(t)+iC。$$

在這等式中我們把虛數部分分出並利用條件(3)。則我們得

在 γ_{2m} 上

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}U(\sigma)\mathrm{Re}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-t}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}}U(\sigma)\,\mathrm{Im}\,\{P(t;\zeta)\}d\sigma=$$
$$=f^*(s)-\mathrm{Im}\,\{\omega(t)\}+C'_m; \qquad (5)$$
$$C'_m=C_m-C。$$

等式(5)是奇性積分方程，它的未知數是在弧 γ_{2m} 上 $U(x,y)$ 的數値。解出這方程後，我們利用公式(4)求得 $U(x,y)$。在 § 27 中所敍述的方法可能使方程(5)歸到弗列德和蒙方程。然而這方程的研究與解出在一般的情況中給出可觀的困難。所以我們祇限於考究最簡單的同時在應用上又有充分興趣的情況，卽當區域 D 是半平面的情況。下節便將致力於這一情況。

§ 67. 半平面的希爾伯脫問題 半平面的施窪而茨核是容易建立的。爲此我們利用 §41 的公式(26)。

圓的施窪而茨核是熟知的，它等於

$$\frac{1}{2\pi}T'(t,\tau)d\sigma'=\frac{1}{2\pi}\frac{\tau+t}{\tau-t}d\sigma',$$

其中 t 是圓內的點，τ 是圓周的點，$d\sigma'=|d\tau|$。使單位圓保角映射到半平面的上面 $y>0$ 的函數有下式樣

$$t=\frac{z-i}{z+i}, \quad \tau=\frac{\zeta-i}{\zeta+i}。$$

用 §41 的公式(26)

$$\frac{1}{2\pi}T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{\pi i}\frac{\zeta z+1}{\zeta-z}\frac{|d\zeta|}{|\zeta+i|^2}。$$

若我們令 $\zeta=\xi+i\eta$,則在半平面的邊界上 $\eta=0$ 及 $\zeta=\xi$。由此

$$\frac{1}{2\pi}T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{\pi i}\frac{\xi z+1}{\xi-z}\frac{d\xi}{\xi^2+1} \tag{1}$$

或

$$\frac{1}{2\pi}T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{\pi i}\frac{d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi i}\frac{\xi d\xi}{\xi^2+1}。$$

§ 66 的公式(4)取下式樣:

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\frac{\xi d\xi}{\xi^2+1}+iC;$$

$$u(\xi)=U(\xi,0)。$$

第二個積分是常數。用同一字 C 表記

$$C-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\xi)\frac{\xi d\xi}{\xi^2+1}$$

的數值,我們用下式樣表出施瓦而茨積分

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi)d\xi}{\xi-z}+iC。 \tag{2}$$

爲了簡單起見我們設 $\gamma_2, \gamma_4, \cdots, \gamma_{2n}$ 各段都是有限的,這樣使在半平面的邊界的各部分上,除去無窮遠處,已給出函數 $U(\xi,0)=f(\xi)$。

令 t 是段 γ_{2k} 上的點。在公式(2)中我們令 $z\to t$。重複 §66 的考究,我們來到奇性積分方程

$$\text{在 } \gamma_{2m} \text{ 上}\quad -\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2+\cdots+\gamma_{2n}}u(\xi)\mathrm{Re}\left(\frac{d\xi}{\xi-t}\right)=f^*(t)-\mathrm{Im}\{\omega(t)\}+C'_m。$$

表記的意義是與 § 66 中一樣的。

可能簡化我們的方程。首先, $\xi, t, d\zeta$ 的數值是實數,所以可能略去符號 Re。仍爲了簡短起見我們表記

$$f^*(t)-\mathrm{Im}\{\omega(t)\}+C'_m=-B(t)。$$

則我們來到方程

$$\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_{2n}} u(\xi)\,\frac{f\xi}{\xi-t}=B(t)。\qquad (3)$$

這方程可能用在 § 27 中所敍述的方法來解出。在這裏我們，如在 § 26 的末尾所作，把這方法略予改變後利用之。

令 z 爲複平面上的任一點。我們令

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_{2n}} u(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi-t}。\qquad (4)$$

利用關於柯西型積分的極限值定理，我們得

在 γ_{2m} 上
$$F_i(t)+F_e(t)=iB(t)。\qquad (5)$$

我們試引入新未知函數 $\Phi(z)$，設

$$\Phi(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}\,F(z)。\qquad (6)$$

在公式(6)中的根式在 γ_{2m} 的兩邊有不同的正負號。由此容易求知 $\Phi(z)$ 滿足方程

在 γ_{2m} 上
$$\Phi_i(t)-\Phi_e(t)=iB(t)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}。\qquad (7)$$

這方程的解的一個是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_{2n}} B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z},$$

且從而，

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}}\times$$
$$\times\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_{2n}} B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-z}。$$

由此我們求得 $u(t)$：利用公式

$$u(t)=F_i(t)-F_e(t),$$

在我們的情況中給出

在 γ_{2m} 上
$$u(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}\times$$
$$\times\int_{\gamma_2+\cdots+\gamma_{2n}}B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\frac{d\xi}{\xi-t}。\quad(8)$$

把齊次方程

在 γ_{2m} 上
$$\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2+\cdots+\gamma_{2n}}u_0(\xi)\frac{d\xi}{\xi-t}=0$$

的解 $u_0(t)$ 加於(8)後我們得到通解。

設

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2+\cdots+\gamma_{2n}}u_0(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}=\frac{\Phi_0(z)}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}},$$

我們得
$$\Phi_{0i}(t)-\Phi_{0e}(t)=0\ 。$$

由此接着知,在全部平面上 $\Phi_0(t)$ 是單值的。利用與 §26 中相類似的討論,我們容易信服 $\Phi_0(t)$ 是冪爲 $n-1$ 的任意多項式。用 $\frac{i^{n-1}}{2}Q_{n-1}(t)$ 來表記它,我們有:

$$u_0(t)=F_{0i}(t)-F_{0e}(t)=\frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}。\quad(9)$$

方程(3)的通解有下式樣

在 γ_{2m} 上
$$\left.\begin{aligned}u(t)=&\frac{1}{\pi\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}\times\\&\times\int_{\gamma_2+\cdots+\gamma_{2n}}B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\frac{d\xi}{\xi-t}+\\&+\frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}。\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

因爲函數 $u(t)$ 是實數,多項式 $Q_{n-1}(t)$ 的係數必須取實數。

公式(10)含有 $2n$ 個隨意常數: $B(\xi)$ 中所含的 n 個常數 C'_m 及多

項式 $Q_{n-1}(t)$ 的 n 個係數。給出那些或其他附加的條件，可能確定它們。特別地說，可能這樣地選定它們，俾使 $u(t)$ 在 α_k 及 β_k 點已是連續的。

§68. 關於兩彈性半平面的接連問題 令給出兩種彈性介質，以其中的一種裝滿上半平面，而以另一種裝滿下半平面。我們設兩半平面沿到無窮遠的兩直線 $x<-a$ 及 $x>a$（圖 19）接連着，其間無摩擦存在。在 $-a\leqslant x\leqslant a$ 段存在着無限窄狹的縫，把兩半平面分開。在縫的兩邊的兩半平面上有相同的，沿着縫均勻分佈的，強度爲 h 的法向拉力施於其上。最後，我們設在無窮遠處應力等於零。所要求的是在兩半平面中的應力場。我們試用 σ_x^1, σ_y^1, τ_{xy}^1 表記上半平面中的應力，用 u_x^1, v_x^1 表記上半平面中的位移，用 λ_1 及 μ_1 表記它的拉美係數。最後，我們令

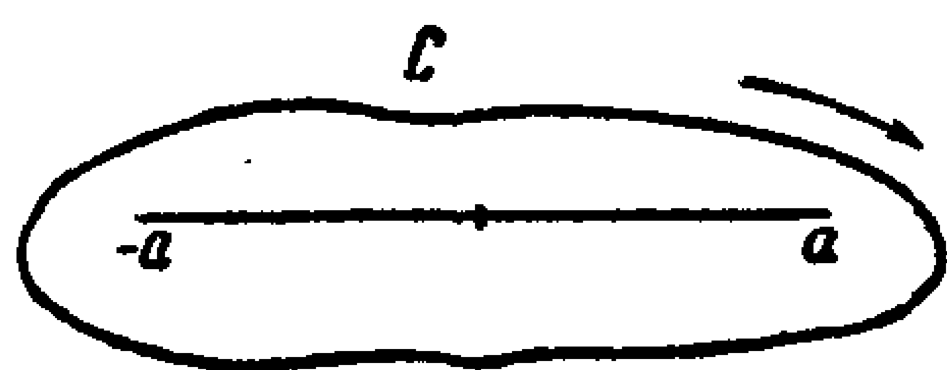


圖 19

$$\varkappa_1=\frac{\lambda_1+3\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}。$$

關於下半平面的各同數量我們將給予標號 2 來表示。我們也將用 $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ 及 $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ 分別表記上半平面及下半平面的高爾剎函數。我們試闡明我們的問題的邊界條件。

首先，沿着 $y=0$ 軸的全部

$$\tau_{xy}^1=\tau_{xy}^2=0。\tag{1}$$

事實上，在兩半平面相接連的 $|x|>a$ 的兩段上，沒有摩擦，切向應力不存在；在 $|x|<a$ 段上僅有法向力，切向應力也不存在。再者，在 $|x|<a$ 段上，根據條件，有強度爲 h 的法向拉力的作用。這給我們下面一組條件：

$$\sigma_y^1=h,\quad \sigma_y^2=h,\quad y=0,\quad |x|<a。\tag{2}$$

最後，在彈性介質接連處的兩段上兩介質的豎直法向應力及豎直位移必須是相同的。這引我們到下組條件：

$$\sigma_y^1=\sigma_y^2,\quad y=0,\quad |x|>a; \tag{3}$$

$$u_y^1=u_y^2,\quad y=0,\quad |x|>a。 \tag{4}$$

解我們的問題,我們以下面條件代替邊界條件(3)及(4):

$$u_y^1=0,\quad u_y^2=0,\quad y=0,\quad |x|>a。 \tag{5}$$

這顯然沒有違背條件(4)。關於條件(3),則我們將在最後計算中信服,它也被滿足了。

代替(3)及(4)的條件(5)的引出允許我們分開地考究上下兩半平面。這樣,對上半平面說我們有下面的邊界條件:

$$\tau_{xy}^1=0,\quad y=0; \tag{6}$$

$$\sigma_y^1=h,\quad y=0,\quad |x|>a; \tag{7}$$

$$u_y^1=0,\quad y=0,\quad |x|>a。 \tag{8}$$

同樣的條件對下半平面說也成立。所以我們以後將省去標號 1 及 2 。

我們轉到高爾剎函數 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$。依照 §40 的公式(8)及(9)在直線 $y=0$ 上

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int(X_\nu+iY_\nu)ds。 \tag{9}$$

依照已知的公式

$$X_\nu=\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y),$$

$$Y_\nu=\tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y),$$

其中 ν 是境界的向外法線。我們考究上半平面,所以 ν 是指向負 y 的一邊,它使 $\cos(\nu,x)=0$, $\cos(\nu,y)=-1$。現在由條件(6)我們得 $X_\nu=0$, $Y_\nu=-\sigma_y$。再者, $ds=dx$。將它們代入(9),我們得:

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\int\sigma_y dx,\quad y=0。$$

但是當 $y=0$ 時, $z=x=\bar{z}$,則我們有理由給上面等式另一式樣

$$\varphi(z)+\bar{z}\,\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\int\sigma_y dx,\quad y=0。 \tag{10}$$

我們試表記

$$z\varphi'(z)+\psi(z)=\theta(z)。\tag{11}$$

函數 $\theta(z)$ 在上半平面中是正則的。由(10)接着得

$$\varphi(z)+\overline{\theta(z)}=\int\sigma_y dx。\tag{12}$$

上一等式的右邊部分是實數。由此接着知左邊部分也是實數,即

$$\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}=\operatorname{Im}\{\theta(z)\},\quad y=0。$$

於是則調和函數 $\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}$ 及 $\operatorname{Im}\{\theta(z)\}$,既然在兩半平面的邊界上是相等的,它們就在任何處都相等,且從而解析函數 $\varphi(z)$ 及 $\theta(z)$ 能相差一實數常數。但是 $\varphi(z)$ 一般地祇確定到留有一常數不定,所以我們有理由設

$$\varphi(z)\equiv\theta(z)。$$

以此代入(12)中並對 x 微分,我們得:

$$\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\}=\frac{1}{2}\sigma_y,\quad y=0。\tag{13}$$

利用條件(7),我們有:

$$\operatorname{Re}\{\varphi'(z)\}=\frac{h}{2},\quad y=0,\quad |x|<a。\tag{14}$$

我們試從事於條件(8)。用§40的公式(4)

$$2\mu(u_x+iu_y)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}。$$

在這公式中我們設 $y=0$。則 $z=\bar{z}$,及

$$2\mu(u_x+iu_y)=\varkappa\varphi(z)-\overline{\varphi(z)}。$$

把虛數部分分出並利用條件(8),我們得

$$\operatorname{Im}\{\varphi(z)\}=0,\quad y=0,\quad |x|>a。$$

對 x 微分這等式後,我們得

$$\operatorname{Im}\{\varphi'(z)\}=0,\quad y=0,\quad |x|>a。\tag{15}$$

條件(14)及(15)示出函數 $\varphi'(z)$ 是希爾伯脫問題的解。

我們令 $\Phi(z)=\frac{1}{i}\varphi'(z)$。條件(14)及(15)變成下面:

$$\left.\begin{array}{lll}\operatorname{Re}\{\Phi(z)\}=0, & y=0, & |x|>a, \\ \operatorname{Im}\{\Phi(z)\}=-\frac{h}{2}, & y=0, & |x|<a。\end{array}\right\} \tag{16}$$

在我們的情況中僅是一段 $\gamma_2(-a, a)$。再者，$\omega(t)\equiv 0$，$f^*(t)=$ $=-\frac{h}{2}$ 且從而，$B(t)=-\frac{h}{2}+C_1'$。我們試用 B 表記 $-\frac{h}{2}+C_1'$ 的數值。現在用 §67 的公式(10)我們求得:

當 $y=0$，$|t|<a$ 時

$$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}=\frac{B}{\pi\sqrt{a^2-t^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}\,d\xi}{\xi-t}+\frac{A}{\sqrt{a^2-t^2}}。\tag{17}$$

我們試計算(17)中的積分。我們用 i 乘它又用 i 除它使它略爲簡化成下式樣

$$\frac{B}{\pi\sqrt{t^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2-a^2}\,d\xi}{\xi-t}。$$

我們試選根的那一支，它在無窮遠處有下展開式

$$\sqrt{z^2-a^2}=z-\frac{a^2}{2z}+\cdots$$

我們試考究柯西型積分:

$$\chi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\sqrt{\zeta^2-a^2}}{\zeta-z}\,d\zeta。$$

境界 C 是在圖 19 上表出的；z 點是在 C 的外面。我們試在被積函數的分子中加上再減去 ζ。則我們得

$$\chi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\sqrt{\zeta^2-a^2}-\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta。$$

因爲函數 $\frac{\zeta}{\zeta-z}$ 是在 C 的裏面正則的，第二個積分等於零。再者，函數 $\sqrt{\zeta^2-a^2}-\zeta$ 是在 C 的外面正則的且是在無窮遠處等於於零。所以，第一個積分是柯西積分，因之

$$\chi(z)=\sqrt{z^2-a^2}-z。$$

境界 C 與在 $(-a, a)$ 段上來回過兩次是等效的。在段的上面及下

面根有不同的正負號，使

$$\chi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\xi-z}\,d\xi。$$

由此

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\xi-z}\,d\xi=\sqrt{z^2-a^2}-z。$$

根據柯西型積分的極限值定理

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2-a^2}}{\xi-t}\,d\xi=\frac{1}{2}[\chi_i(t)+\chi_e(t)]=-t。$$

以此代入(17)後，我們得：

當 $y=0$ 及 $|t|<a$ 時 $$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}=-\frac{Bti}{\sqrt{t^2-a^2}}+\frac{A}{\sqrt{t^2-a^2}}。\qquad(18)$$

我們試證明 $A=0$。我們試設 $\varphi'(z)=p+iq$；則 $\Phi(z)=q-ip$。用 §40 的公式(5)

$$p=\frac{1}{4}(\sigma_x+\sigma_y)。$$

在我們的問題中，顯然，σ_x 及 σ_y 在對 y 軸說是對稱的兩點上是相同的。由此接着知

$$p(x,y)=p(-x,y),$$

即 $p(x,y)$ 是 x 的偶函數。於是則

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial y}$$

也是 x 的偶函數，而函數

$$q(x,0)=\int_{a}^{x}\frac{\partial q(x,0)}{\partial x}\,dx+q(0,0)$$

或是奇的，或是與奇的相差一常數。用公式(18)

$$q(t,0)=\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}=-\frac{Bti}{\sqrt{t^2-a^2}}+\frac{A}{\sqrt{t^2-a^2}},\quad |t|<a。$$

由此 $$q(-t,0)=\frac{Bti}{\sqrt{t^2-a^2}}+\frac{A}{\sqrt{t^2-a^2}}。$$

和
$$q(t,0)+q(-t,0)=\frac{2A}{\sqrt{t^2-a^2}}$$
僅在 $A=0$ 時能是常數。

這樣，
$$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}=-\frac{Bti}{\sqrt{t^2-a^2}},\quad y=0,\quad |t|<a_{\circ} \tag{19}$$

我們試回憶，當 $|t|>a$ 及 $y=0$ 時 $\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}=0$。這樣，$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\}$ 在實數軸的全部上是已知了。

用 § 67 的公式(1)及(2)
$$\Phi(z)=-\frac{B}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}\,(\xi-z)}+iC', \tag{20}$$
其中 C' 是實數常數。爲了計算在(20)中的積分，我們試考究積分
$$\rho(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-a^2}\,(\zeta-z)},$$
其中 C 是在圖 19 (第 307 頁)上所表出的境界。函數 $\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-a^2}}$ 是在 C 的外面正則的，且在無窮遠處是等於一；依照柯西積分的已知性質
$$\rho(z)=\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1_{\circ}$$
我們試以與其等效的在 $(-a,a)$ 段上往返過兩次所組成的境界來代替境界 C。用與在積分(17)的計算中所作同樣的討論，我們求得
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-a^2}\,(\xi-z)}=\frac{1}{i}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right),$$
及
$$\Phi(z)=\frac{B}{i}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)+C'i_{\circ}$$

現在
$$\varphi'(z)=i\Phi(z)=B\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)-C'_{\circ}$$
餘下的是確定常數 B 及 C'。依照假定，在無窮遠處應力等於零。由此
$$(\sigma_x+\sigma_y)_{z=\infty}=4\operatorname{Re}\{\varphi'(\infty)\}=-4C'=0$$
及 $C'=0$。爲了求 B，我們轉到條件(14)。在 $(-a,\ a)$ 段上根式 $\sqrt{z^2-a^2}$

是虛數,因之

$$\text{當 } y=0,\ -a\leqslant x\leqslant a \text{ 時 } \operatorname{Re}\{\varphi'(x)\}=-B,$$

由於條件(14)它給出 $B=-\frac{h}{2}$。最後

$$\varphi'(z)=-\frac{h}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)。\tag{21}$$

我們已得到滿足邊界條件(1),(2)及(5)的上半平面的解。對下半平面解我們的問題,我們來到那相同的解(21),這樣 $\varphi_1(z)\equiv\varphi_2(z)$。餘下的是要驗證我們的解滿足條件(3)。但是這直接地由公式(13)得出。由於這公式

$$\text{當 } y=0 \text{ 時} \qquad \sigma_y^1=2\operatorname{Re}\{\varphi_1'(z)\}=2\operatorname{Re}\{\varphi_2'(z)\}=\sigma_y^2。$$

我們的問題現在已完全解出。

§ 69. 關於兩彈性半平面的接連問題(一般情況) 現在我們試設在兩彈性半平面的總邊界上有多個縫 $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots,(a_n,b_n)$。我們試保留 §68 的在邊界上摩擦不存在的假定,我們並假定在上半平面的縫的邊緣受有強度爲 $p_1(x)$ 的法向應力,在下半平面的邊緣受有強度爲 $p_2(x)$ 的法向應力。我們來到下組邊界條件:

$$\text{在全部 } x \text{ 軸上} \qquad \tau_{xy}^1=0, \qquad \tau_{xy}^2=0, \tag{1}$$

$$\text{在縫上} \qquad \sigma_y^1=p_1(x),\ \sigma_y^2=p_2(x), \tag{2}$$

$$\text{在縫外的 } x \text{ 軸上} \qquad \sigma_y^1=\sigma_y^2, \qquad u_y^1=u_y^2。\tag{3}$$

也如在 §68 中,我們求得,由於條件(1)

$$\varphi_k(z)=z\varphi_k'(z)+\psi_k(z), \quad k=1,2。$$

及

$$\operatorname{Re}\{\varphi_k'(z)\}=\frac{1}{2}\sigma_y^k, \quad y=0, \quad k=1,2。$$

等式(2)及等式(3)的第一個給出 $\varphi_1'(z)$ 及 $\varphi_2'(z)$ 的條件如下:

$$\text{在縫上} \qquad \operatorname{Re}\{\varphi_k'(x)\}=\frac{1}{2}p_k(x), \tag{4}$$

$$\text{在縫外的 } x \text{ 軸上} \qquad \operatorname{Re}\{\varphi_1'(x)\}=\operatorname{Re}\{\varphi_2'(x)\}。\tag{5}$$

我們試研究條件(3)的第二個。作如在 §68 中的討論,我們引它到下式樣

$$C_1\,\mathrm{Im}\{\varphi_1(x)\}=C_2\,\mathrm{Im}\{\varphi_2(x)\},$$

其中
$$C_k=\frac{\varkappa_k+1}{2\mu_k},\quad k=1,2。$$

對 x 微分這等式,我們得函數 $\varphi_k'(z)$ 的尋求所必須的次一邊界條件:

在縫外的 x 軸上

$$C_1\,\mathrm{Im}\{\varphi_1'(x)\}=C_2\,\mathrm{Im}\{\varphi_2'(x)\}。\tag{6}$$

我們試表記

$$\overline{\varphi}_2(z)=\overline{\varphi_2(\overline{z})}。$$

函數 $\overline{\varphi}_2(z)$ 是在上半平面中正則的;它的微商在無窮遠處是等於零。我們試注意,在 x 軸上

$$\mathrm{Re}\{\overline{\varphi}_2'(x)\}=\mathrm{Re}\{\varphi_2'(x)\},\quad \mathrm{Im}\{\overline{\varphi}_2'(x)\}=-\mathrm{Im}\{\varphi_2'(x)\}。$$

我們在考究中試引入

$$\omega(z)=C_1\varphi_1'(z)+C_2\overline{\varphi}_2'(z)。$$

它是在上半平面中正則的,且在 x 軸上滿足下面的條件:

在縫上
$$\mathrm{Re}\{\omega(x)\}=\frac{1}{2}(C_1p_1(x)+C_2p_2(x)),\tag{7}$$

在縫外
$$\mathrm{Im}\{\omega(x)\}=0。\tag{8}$$

從(4)得出它們的第一個,而從(6)得出它們的第二個。這樣,$\omega(z)$的確定被引到希爾伯脫問題,這問題的解已在 §67 中給出。確定 $\omega(z)$ 後,我們用公式(5)及(7)求得,在縫外的 x 軸上

$$\mathrm{Re}\{\varphi_1'(x)\}=\mathrm{Re}\{\varphi_2'(x)\}=\frac{\mathrm{Re}\{\omega(x)\}}{C_1+C_2}。$$

現在函數 $\varphi_1'(x)$ 及 $\varphi_2'(x)$ 的實數部分在全部 x 軸上是已知了,且這些函數是用 §67 的公式(2)來確定。

$\omega(z)$ 的式子含有 n 個隨意常數,它們也在 $\varphi_1(x)$ 及 $\varphi_2(x)$ 中存在着。這些常數可能由下面的考究來確定。

條件(8)是由(6)得來的,而(6)又是由對 x 微分條件(3)

$$u_y^1=u_y^2$$

得來的。由此接着知,我們所建立的解將不滿足條件(3),而是滿足

在縫外 $$\frac{\partial u_y^1}{\partial x}=\frac{\partial u_y^2}{\partial x},$$

或者,同樣地,

在縫外 $$u_y^1=u_y^2+\text{常數},$$

末一等式中的常數,一般地說,在縫外 x 軸的不同部分上將是不同的。爲了使我們所建立的解滿足所有邊界條件,指出的常數必須是零。這條件已足夠確定在 $\omega(z)$ 中存在着的隨意常數。

兩個彈性的各向異性的半平面相接連的問題可類似地解出。

§70. 在彈性半平面上剛堅的衝體的壓力 我們試表出一式樣隨意的剛堅衝體壓入彈性半平面中(圖20)。我們試設立確定與衝體壓力引起的應力的問題。我們試作下面的假設:

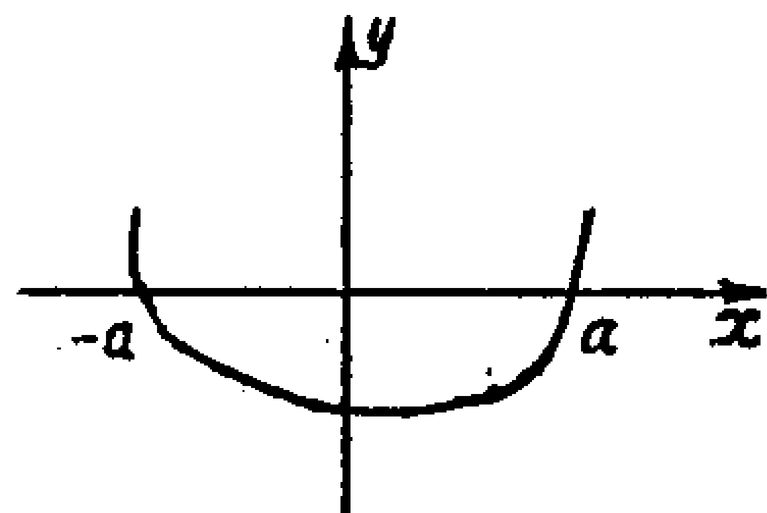


圖 20

(a) 邊界的 $x>a$ 及 $x<-a$ 兩段上沒有應力。

(б) 衝體的壓力是與邊界垂直的。由此接着知,衝體下沒有摩擦。

指出的假設允許表述問題的邊界條件如下:

(1)當 $y=0$ 時 $\tau_{xy}=0$, (1)

(2)當 $y=0$ 及 $|x|>a$ 時 $\sigma_y=0$。 (2)

(3)因爲衝體的形狀已知,故在衝體下面的半平面上的各點的豎直位移,除掉與衝體沉入深度有關的一隨意常數項外,可認爲是已知的。這樣,

$$\text{當 } y=0,\ |x|<a \text{ 時},\quad u_y=f(x)+\text{常數}, \tag{3}$$

其中 $f(x)$ 是一已給出的函數。

也如在§68中一樣,條件(1)允許建立下面各式 ($\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 是

高爾利函數):

$$z\varphi'(z)+\psi(z)=\varphi(z), \tag{4}$$

$$當\ y=0\ 時\quad \mathrm{Re}\{\varphi'(z)\}=\frac{1}{2}\sigma_y, \tag{5}$$

$$2\mu(u_x+iu_y)=\varkappa\varphi(z)-\overline{\varphi(z)}。 \tag{6}$$

由於(4),問題歸結到僅函數 $\varphi(z)$ 的尋求;關係(5)及(6)使這末一問題歸結到希爾伯脫問題。

我們試表記

$$\varphi(z)=p_1+iq_1,\quad \varphi'(z)=p+iq。$$

條件(2)及(5)給出:

$$當\ y=0\ 及\ |x|>a\ 時\quad p=0。 \tag{7}$$

在(6)中把虛數部分分開並利用條件(3),我們得:

$$當\ y=0\ 及\ |x|<a\ 時\qquad q_1=\frac{2\mu}{\varkappa+1}f(x)+常數。$$

我們試對 x 微分這等式並注意 $\frac{\partial q_1}{\partial x}=q$。則我們得

$$當\ y=0\ 及\ |x|<a\ 時\quad q=\frac{2\mu}{\varkappa+1}f'(x)。 \tag{8}$$

我們又來到希爾伯脫問題。利用§67的方法可能解它。我們選另一方法,它使我們不必須計算某些常數。

設 $\varphi(z)$ 在半平面中是有界的,我們能利用施窪而茨積分來表出它❶

$$\varphi(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p_1(\xi,0)}{\xi-z}\,\frac{1+\xi z}{1+\xi^2}\,d\xi+iC。$$

我們試微分這等式,然後用部分積分法積分。考慮 $\frac{\partial p_1(\xi,y)}{\partial\xi}=p(\xi,y)$,我們得

❶ 上下兩半平面的施窪而茨核的正負號不同。

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi,0)}{\xi-z}\,d\xi。$$

爲了簡短起見我們試表記 $p(\xi,0)=p(\xi)$。利用條件(7),我們求得:

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi-z}。\tag{9}$$

現在令 $z\to t$,其中 t 是實數軸上$(-a,a)$段的點。因爲 z 是在下半平面裏,故

$$\varphi'(t)=p(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi-t}。$$

我們試把虛數部分分出。由於條件(8),我們有:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)d\xi}{\xi-t}=\frac{2\mu}{\varkappa+1}f'(t)。\tag{10}$$

這是奇性方程,它的解可能用 §26 的方法得出:即,變到 §26 的公式(26)的表記,我們得:

$$p(t)=-\frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{a^2-t^2}}\int_{-a}^{a}\frac{f'(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi-t}d\xi+\frac{A}{\sqrt{a^2-t^2}}。\tag{11}$$

若已知施於衝體的力的合向量 P,常數 A 是可能確定的。事實上,

$$P=\int_{-a}^{a}\sigma_y(t,0)dt=2\int_{-a}^{a}p(t)dt。$$

爲了簡短起見用 $p_0(t)$表記在(11)中的第一項後,我們顯然有

$$\frac{1}{2}P=\int_{-a}^{a}p_0(t)dt+\pi A。$$

由此

$$A=\frac{P}{2\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}p_0(t)dt。\tag{12}$$

我們試注意平底衝體的特別情況。在這情況中 $f(x)=$常數及

$$p(t)=\frac{P}{2\pi\sqrt{a^2-t^2}}。\tag{13}$$

這公式給出在衝體下法向應力分佈的規律。再者,

$$\varphi'(z)=-\frac{P}{2\pi^2 i}\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}(\xi-z)}。$$

爲了計算這積分,我們設

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}(\xi-z)},$$

其中 C 是在圖 19 上表出的境界。函數 $\frac{1}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$ 是在 C 的外面正則的且在無窮遠處等於零,所以

$$\omega(z)=\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}。$$

以在$(-a,a)$段上往返過兩次來代替境界 C,我們得

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{d\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}(\xi-z)}=\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

且從而,

$$\varphi'(z)=-\frac{P}{2\pi\sqrt{a^2-z^2}}。\tag{14}$$

在公式(14)中的根在$(-a, a)$段的下面是負的。

§71. 多個衝體的情況 在有多個衝體壓在半平面上的情況中,問題在原理上與單個衝體情況同樣地解出;自然,計算就因而較複雜了。

我們試用(α_1, β_1), (α_2, β_2), $\cdots$, (α_n, β_n)表記與衝體接連的邊界的各段;這些段總起來我們試用 L 來記,而其餘各段總起來我們試用 M 來表記。我們試用 $f(x)$,與以前一樣,表記在衝體下橫坐標爲 x 的點的豎直位移。$f(x)$ 的數值除掉一隨意常數外能事先認爲是已知的,這常數在不同的段(α_k, β_k)上能有不同的數值。

利用前節的表記,我們把多個衝體壓力的問題引到下面的希爾伯脫問題:

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } M \text{ 上} \qquad \operatorname{Re}\{\varphi'(t)\}=0,\\ &\text{在 } L \text{ 上} \qquad \operatorname{Im}\{\varphi'(t)\}=\frac{2\mu}{\varkappa+1}f'(t),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

在這裏

$$\varphi'(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{p(\xi)}{\xi-z}\,d\xi。\tag{2}$$

這些公式的導出與在前節中者一樣。在(2)中設 $z \to t$, 其中 t 是 L 上的點,並把虛數部分分開,我們來到方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{p(\xi)d\xi}{\xi-t} = \frac{2\mu}{\varkappa+1} f'(t)。 \tag{3}$$

它的解可能用 §67 的公式(8),在這公式裏以 $\frac{2\mu}{\varkappa+1} f'(t)$代替 $B(t)$後,寫出:

在 L 上
$$p(t) = -\frac{2\mu}{\pi(\varkappa+1)\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}} \times$$
$$\times \int_L \frac{f'(\xi)\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}}{\xi-t} d\xi +$$
$$+\frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}。 \tag{4}$$

若施於每個衝體上的力的合向量分別是已知的,多項式 $Q_{n-1}(t)$ 的係數就可以確定;這些係數可用超橢圓積分表出。

若衝體是平底的,則 $f(x)$ = 常數(在不同的段(α_k, β_k) 上這常數可以是不同的),且 $f'(x) \equiv 0$。在這情況中

$$p(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}。 \tag{5}$$

以此代入(2)中,我們容易求得:

$$\varphi'(z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)(\beta_k-z)}}。 \tag{6}$$

§72. 彈性理論的混合問題 我們試考究充滿彈性介質的某平面區域 D。一般地說,我們將設區域 D 是複連通的(圖 21)。設在它的境界的某些部分上介質點的位移已給出,我們用 M 表記這些部分;而在境界的餘下的各部分上施於彈性介質的力已給出,我們用 L 表記這些

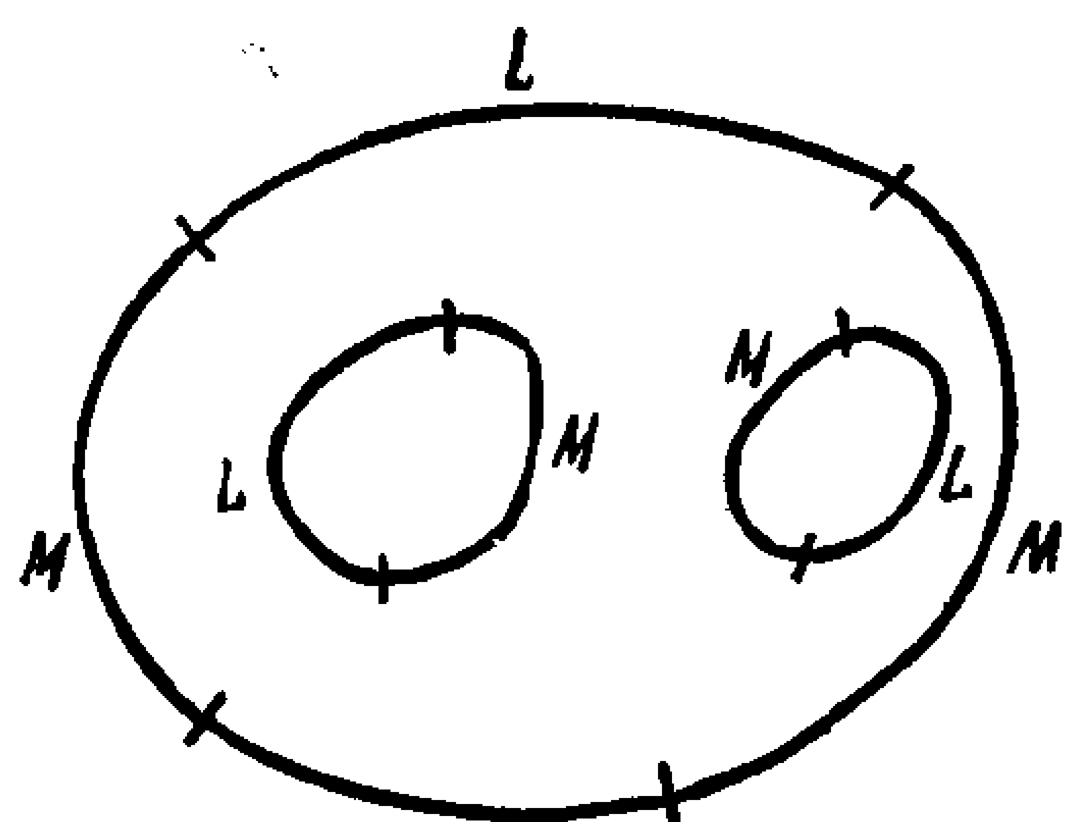


圖 21

部分。在這些條件下確定彈性介質中的應力的問題就叫作彈性理論的混合問題。

以後我們將設區域 D 的境界是充分平滑的。

我們試引入下面的表記。用 C 表記區域 D 的境界，即 $C=L+M$。再者，L 是由一些彼此不相連的弧所組成，我們用 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 表記它們；我們將用 $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \cdots; \alpha_n, \beta_n$ 表記這些弧與 M 的那些弧分界的各點的複坐標。依一般習慣，我們用 X_ν 及 Y_ν 表記施於弧 L 的外力的分量；用 u_x 及 u_y 表記彈性位移。由於 §40 的公式(4)，(8)及(9)，我們的問題的高爾刹函數滿足下面的邊界條件：

$$\text{在}\, M\, \text{上}\qquad \varkappa\varphi(\zeta)-\zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=2\mu(u_x+iu_y), \tag{1}$$

$$\text{在}\, \gamma_k\, \text{上}\qquad \varphi(\zeta)+\zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=i\int(X_\nu+iY_\nu)ds+C_k。 \tag{2}$$

我們試把這些條件變樣寫出。令境界點的函數 $\delta(\zeta)$ 及 $f(\zeta)$ 的定義為

$$\delta(\zeta)=\begin{cases} 0 & \text{在}\, M\, \text{上}, \\ \varkappa+1 & \text{在}\, L\, \text{上}; \end{cases} \tag{3}$$

$$f(\zeta)=\begin{cases} -i\int(X_\nu+iY_\nu)ds & \text{在}\, L\, \text{上}, \\ 2\mu(u_x+iu_y) & \text{在}\, M\, \text{上}。 \end{cases} \tag{4}$$

在每一個弧 γ_k 上確定積分

$$\int(X_\nu+iY_\nu)ds$$

所餘下的未定常數可能這樣地擇取，俾使 $f(\zeta)$ 在，例如，α_k 點已是連續的。最後，我們又設

$$C(\zeta)=\begin{cases} -C_k & \text{在}\, \gamma_k\, \text{上}, \\ 0 & \text{在}\, M\, \text{上}。 \end{cases} \tag{5}$$

用這些表記,條件(1)及(2)可寫成:

$$\varkappa\varphi(\zeta)-\delta(\zeta)\varphi(\zeta)-\zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta)+C(\zeta)。 \qquad (6)$$

如一般的,確定函數 $\varphi(z)$ 是主要的;其後就可能求得 $\psi(z)$,即利用(6)計算它的境界值,然後由此用柯西或施瓦而茨積分得出 $\psi(z)$。

我們試從事於 $\varphi(z)$ 的尋求。用

$$\frac{1}{4\pi}T(z;\zeta)d\sigma$$

乘等式(6)的兩邊,並沿境界 C 積分,這裏的 $T(z;\zeta)$ 是區域 D 的施瓦而茨核。重複§42的討論,我們得

$$\varkappa\varphi(z)-\frac{1}{4\pi}\int_C\delta(\zeta)\varphi(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int_C\zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}\,T(z;\zeta)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_C f(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int_C C(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma。 \qquad (7)$$

方程(7)可能簡化。

我們試回憶§41的恆等式(23)

$$\frac{1}{4\pi}\int_C\overline{F(\zeta)}\,T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1}{2}\overline{F(a)},$$

這式對任一在 D 中正則的函數 $F(z)$ 說是正確的。在§42中已建立 $\varphi'(z)$ 是在 D 中正則的,所以

$$\frac{1}{4\pi}\int_C\overline{\varphi'(\zeta)}\,T(z;\zeta)\,d\sigma=\frac{1}{2}\,\overline{\varphi'(a)}。$$

在這恆等式中我們試令 $z=a$。相減,我們得

$$\frac{1}{4\pi}\int_C\overline{\varphi'(\zeta)}\{T(z;\zeta)-T(a,\zeta)\}d\sigma=0。 \qquad (8)$$

我們試用 z 乘恆等式(8)並由(7)減之。在(7)中左邊的第三項變成:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_C\zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}T(z;\zeta)d\sigma=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_C\overline{\varphi'(\zeta)}\left\{[(\zeta-z)T(z;\zeta)-zT(a,\zeta)]\frac{d\sigma}{d\bar{\zeta}}\right\}d\bar{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_C\overline{\varphi(\zeta)}\frac{d}{d\sigma}\left\{[(\zeta-z)T(z;\zeta)-zT(a,\zeta)]\frac{d\sigma}{d\bar{\zeta}}\right\}d\sigma。 \qquad (9)$$

這樣,微商 $\varphi'(\zeta)$ 從方程(7)消去。我們又注意,除掉對數項不定外,積分(9)的核是在包括境界的區域 D 中連續的。我們將用 $K(z;\zeta)$ 表記積分(9)的核。

我們轉到在(7)中左邊的第二項。依照定義並用§41的公式(27)

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \delta(\zeta)\varphi(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=\frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=$$

$$=\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)P(z;\zeta)d\sigma。\tag{10}$$

轉到方程(7)的右邊部分,我們表記

$$\frac{1}{4\pi}\int_C f(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=F(z)。\tag{11}$$

再者,依照定義,

$$\frac{1}{4\pi}\int_C C(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma=-\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{4\pi}\int_{\gamma_k} T(z;\zeta)d\sigma=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_kF_k(z),\tag{12}$$

其中我們已表記

$$F_k(z)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_k} T(z;\zeta)d\sigma。$$

公式(9)及(12)允許把方程(7)引到下式樣:

$$\varkappa\varphi(z)-\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_C \varphi(\zeta)P(z;\zeta)d\sigma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}K(z;\zeta)d\sigma=F(z)+\sum_{k=1}^{n}C_kF_k(z)。\tag{13}$$

現在令 $z\to t$,其中 t 是 L 上的點。利用柯西型積分的極限值定理,我們得到奇性積分方程

$$(\varkappa-1)\varphi(t)-\frac{\varkappa+1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta-\frac{\varkappa+1}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)P(t,\zeta)d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}K(t,\zeta)d\sigma=2F(t)+2\sum_{k=1}^{n}C_kF_k(t)。\tag{14}$$

我們試把第二個及第三個積分移到右邊去，然後用 $\Phi(t)$ 表記這樣所得的右邊部分。則

$$(\varkappa-1)\varphi(t)-\frac{\varkappa+1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=\Phi(t)。\tag{15}$$

暫時把 $\Phi(t)$ 當作是已知的數值，我們能解出方程(15)。用§27 的公式(8)

在 L 上
$$\varphi(t)=-\frac{\varkappa-1}{4\varkappa}\Phi(t)-$$
$$-\frac{\varkappa+1}{4\varkappa\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k}\right)^m\int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k}\right)^m\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta+$$
$$+\frac{Q_{n-1}(t)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)^{1-m}(t-\beta_k)^m};\qquad m=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)。$$

我們試令這解符合 $\varphi(t)$ 是在 α_k 各點連續的要求。爲此必要且充分的條件是 $Q_{n-1}(t)=0$，於是

在 L 上
$$\varphi(t)=-\frac{\varkappa-1}{4\varkappa}\Phi(t)-$$
$$-\frac{\varkappa+1}{4\varkappa i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k}\right)^m\int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k}\right)^m\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta。\tag{16}$$

我們試簡短地概述以後解出的經過。直到現在尙留爲任意的常數 C_k 可能這樣地選定，俾使 $\varphi(t)$ 在 β_k 各點處也是連續的。我們試以這些數值代入(13)及(16)。再者，在積分 $-\frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ 中我們試以(16)式代替 $\varphi(\zeta)$。此後指出的積分的核變爲絕對可積分的。現在我們在(13)中令 $z\to t$，其中 t 這次表記境界 C 的任何點。在所有積分號下取極限是可能的，這引我們到下式樣的積分方程

$$\varkappa\varphi(t)-\int_C K'(\zeta,t)\varphi(t)\,d\sigma-\int_C K''(\zeta,t)\overline{\varphi(\zeta)}\,d\sigma=\Omega(t),\tag{17}$$

其中 $\Omega(t)$ 是已知的函數。在這方程中把實數部分及虛數部分分開後，我們得兩個弗列德和蒙型積分方程組。可能證明，這組方程，因而方程

(17)，都恆是可解的。解出方程(17)後，我們求得 $\varphi(t)$ 的境界值，於是 $\varphi(z)$ 就可能用它的境界值由柯西積分建立了。

彈性理論的混合問題在 Д. И. 雪爾曼的工作[37 h, k]中敍述得十分詳細。我們看出，在[37 h]中方程(15)是用過於複雜的方法解出的。

§73. 區域變爲圓的有理保角映射的情況　在上面提過的論文[37 h]中 Д. И. 雪爾曼證明了下面的定理：

若利用有理函數把區域 D 保角映射到圓上，則這區域的彈性理論的位移問題可用有限形式的積分來解。

Д. И. 雪爾曼的討論多方面與 Н. И. 穆斯黑里施維利在基本問題的類似定理的證明中所利用的討論相吻合的。在這裏我們重述 Д. И. 雪爾曼的討論，並對它作一些無關重要的更改。

令 $z=\omega(\tau)$ 爲把區域 D 保角映射到圓 $|\tau|<1$ 上的函數。這映射使境界 C 變爲圓周 $|\tau|=1$，我們將用 Γ 表記這圓周；而弧組合 L 及 M 變爲某弧組合 L' 及 M'，在這裏 $L'+M'=\Gamma$。弧 γ_k 變爲圓周 Γ 的某弧 γ'_k。我們試用 α'_k 及 β'_k 表記弧 γ_k 的兩端。我們又表記

$$\zeta=\omega(\sigma),\qquad \varphi(\omega(\tau))=\Phi(\tau),\qquad \psi(\omega(\tau))=\Psi(\tau),$$
$$f(\omega(\sigma))=F(\sigma),\qquad \delta(\omega(\sigma))=\delta_1(\sigma),\qquad C(\omega(\sigma))=C_1(\sigma)。$$

現在在§72的(6)中我們試代入 $\zeta=\omega(\sigma)$。指出的公式就取下式樣：

$$\varkappa\Phi(\sigma)-\delta_1(\sigma)\Phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)}-\overline{\Psi(\sigma)}=F(\sigma)+C_1(\sigma)。\quad(1)$$

根據假定，函數 $\omega(\sigma)$ 是有理的：

$$\omega(\sigma)=\frac{a(\sigma)}{b(\sigma)},$$

其中 $a(\sigma)$ 及 $b(\sigma)$ 是多項式。由此

$$\omega'(\sigma)=\frac{b(\sigma)a'(\sigma)-a(\sigma)b'(\sigma)}{b^2(\sigma)}=\frac{a_1(\sigma)}{b_1(\sigma)},$$

其中 $a_1(\sigma)$ 及 $b_1(\sigma)$ 也是多項式。再者，

$$\overline{\omega'(\sigma)}=\frac{\overline{a_1(\sigma)}}{\overline{b_1(\sigma)}}。$$

在 $a_1(\sigma)$ 及 $b_1(\sigma)$ 中把所有它們的係數換成複共軛值，我們試用 $\overline{a_1(\sigma)}$ 及 $\overline{b_1(\sigma)}$ 表記這樣得來的多項式。則

$$\overline{a_1(\sigma)}=\bar{a}_1(\bar{\sigma}),\quad \overline{b_1(\sigma)}=\bar{b}_1(\bar{\sigma})。$$

但是因爲 $|\sigma|=1$，故 $\bar{\sigma}=\frac{1}{\sigma}$，所以

$$\overline{a_1(\sigma)}=\bar{a}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right),\quad \overline{b_1(\sigma)}=\bar{b}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)。$$

由此顯然，$\overline{\omega'(\sigma)}$ 是 σ 的有理函數；則關於函數 $\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$ 也可同樣地說。旣然是有理的，這函數便能用兩多項式的商來表示：

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{l}a_k\sigma^k}{\sum\limits_{k=0}^{l_1}b_k\sigma^k}=\frac{\rho(\sigma)}{r(\sigma)}。\qquad (2)$$

我們注意，多項式 $r(\sigma)$ 在 Γ 上不變成零，否則 $\omega'(\sigma)$ 在 Γ 上就將變成零，而映射就將不是保角的。然而，在 Γ 的裏面 $r(\sigma)$ 能有零點。我們試用 l' 表記這些零點的個數。顯然，$l'\leqslant l_1$。

我們試用

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{r(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma$$

乘等式(1)，其中 τ 是 Γ 裏面的點，並沿 Γ 積分。回憶函數 $\delta_1(\sigma)$ 及 $C_1(\sigma)$ 的定義，我們得下等式：

$$\varkappa r(\tau)\Phi(\tau)-\frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{r(\sigma)\Phi(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\tau}d\sigma-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{r(\sigma)\overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma-\tau}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\sigma)r(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{r(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma。\qquad (3)$$

我們試研究(3)的左邊部分。由已知恆等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\sigma^s d\sigma}{\sigma-\tau}=\begin{cases}\tau^s & (s\geqslant 0),\\ 0 & (s<0)。\end{cases}$$

接着知：若
$$A(\sigma)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s\sigma^s,$$

則
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{A(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma=\sum_{s=0}^{\infty}A_s\sigma^s。$$

這允許簡單地計算(3)左邊的末兩積分。令

$$\Phi(\tau)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_s\tau^s,\quad \Psi(\tau)=\sum_{s=1}^{\infty}\nu_s\tau^s\ ❶。$$

則
$$\rho(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)}=\sum_{s=-\infty}^{l}\sigma^s\sum_{k=0}^{l-s}(k+1)\bar{\mu}_{k+1}a_{k+s},$$

$$r(\sigma)\overline{\Psi(\sigma)}=\sum_{s=-\infty}^{l_1}\sigma^s\sum_{k=1}^{l_1-s}\bar{\nu}_k b_{k+s}。$$

現在顯然

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\tau}d\sigma=\sum_{s=0}^{l}\tau^s\sum_{k=0}^{l-s}(k+1)\bar{\mu}_{k+1}a_{k+s},\tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{r(\sigma)\overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma-\tau}d\sigma=\sum_{s=0}^{l_1}\tau^s\sum_{k=1}^{l_1-s}\bar{\nu}_k b_{k+s}。\tag{5}$$

我們試用 A_s 及 B_n 分別表記(4)及(5)中的係數。此外，我們又引入記號

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\sigma)\,r(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\tau}=M(\tau),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{r(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma=r_k(\tau)。$$

把所有這些代入(3)中後，我們得

$$\varkappa r(\tau)\Phi(\tau)-\frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{r(\sigma)\Phi(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma=$$

$$=M(\tau)+\sum_{k=1}^{n}C_k r_k(\tau)-\sum_{s=0}^{l}A_s\tau^s-\sum_{s=0}^{l_1}B_s\tau^s。\tag{6}$$

❶ 所以我們設 $\Psi(0)=0$。如已知的，這永能事先要求。

我們注意,方程(6)的右邊部分是在Γ裏面正則的。爲了簡短起見,我們試用$N(\tau)$表記它:

$$N(\tau)=M(\tau)+\sum_{k=1}^{n}C_k r_k(\tau)-\sum_{s=0}^{l}A_s\tau^s-\sum_{s=0}^{l_1}B_s\tau^s。$$

現在令$\tau\to\sigma_0$,其中σ_0是在Γ上的任意點。應用關於柯西積分極限值的定理,我們,如在前節中一樣,得奇性方程

$$(\varkappa-1)r(\sigma_0)\Phi(\sigma_0)-\frac{\varkappa+1}{\pi i}\int_{L'}\frac{r(\sigma)\Phi(\sigma)}{\sigma-\sigma_0}d\sigma=N(\sigma)。\qquad(7)$$

這方程與前節的方程(15)本質上地相吻合,且它的解可能依照§72的公式(16)類似地寫出:

在L'上

$$r(\sigma_0)\Phi(\sigma_0)=-\frac{\varkappa-1}{4\varkappa}N(\sigma_0)-$$

$$-\frac{\varkappa+1}{4\pi i\varkappa}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma_0-\alpha_k'}{\sigma_0-\beta_k'}\right)^m\int_{L'}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m\frac{N(\sigma)}{\sigma-\sigma_0}d\sigma。\qquad(8)$$

我們試改寫公式(8)。依照柯西型積分極限值的定理,我們有:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m\frac{N(\sigma)}{\sigma-\sigma_0}d\sigma_0=$$

$$=-\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma_0-\beta_k'}{\sigma_0-\alpha_k'}\right)^m N(\sigma_0)+$$

$$+\lim_{\tau\to\sigma_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m\frac{N(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma\right\}。$$

以此代入(8)中,我們得:

在L'上

$$r(\sigma_0)\Phi(\sigma_0)=\frac{1}{2\varkappa}N(\sigma_0)-$$

$$-\lim_{\tau\to\sigma_0}\left\{\frac{\varkappa+1}{4\pi i\varkappa}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau-\alpha_k'}{\tau-\beta_k'}\right)^m\int_{L'}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m\frac{N(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma\right\}。\qquad(9)$$

在等式(9)的兩邊中的函數都是解析的,在Γ的裏面正則的,且這兩函數在弧組合L'上是相等的。解析拓展原理可肯定指出的兩函數是在Γ的裏面恆等的:

$$r(\tau)\Phi(\tau)=\frac{1}{2\varkappa}N(\tau)-$$

$$-\frac{\varkappa+1}{4\pi i\varkappa}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau-\alpha_k'}{\tau-\beta_k'}\right)^m\int_{L'}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m\frac{N(\sigma)}{\sigma-\tau}d\tau。\qquad(10)$$

公式(10)的右邊部分含有 $n+l+l_1$ 個未知常數 C_k, μ_s, ν_s。若確定它們,則公式 (10) 給出我們的問題的解。這些未知常數可能從下面的條件來確定:

(1)$\Phi(\tau)$在各 β_k' 點是連續的。

(2)在 Γ 的裏面,在 $r(\tau)$ 是零的那些點 (10) 的右邊部分也變成零;爲了使 $\Phi(\tau)$ 是在 Γ 中正則的,這是必要的。

(3)右邊與左邊泰勒爾係數是相等的。

(4)我們試用 $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\tau}$ 乘等式(1)的共軛式,並沿 Γ 積分。則我們得

$$\Psi(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma+\frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma-\tau}d\sigma-\varkappa\overline{\Phi(0)}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-\tau}d\sigma-\sum_{k=i}^{n}\frac{\overline{C}_k}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{d\sigma}{\sigma-\tau}。\qquad(11)$$

我們試以從(8)得來$\Phi(\tau)$ 的式子代入 (11) 中。在右邊及左邊比較 τ 的相同冪的泰勒爾係數,我們得到最末一組條件。

所有所說的引到一組線性方程,可由它們來確定所要求的常數。

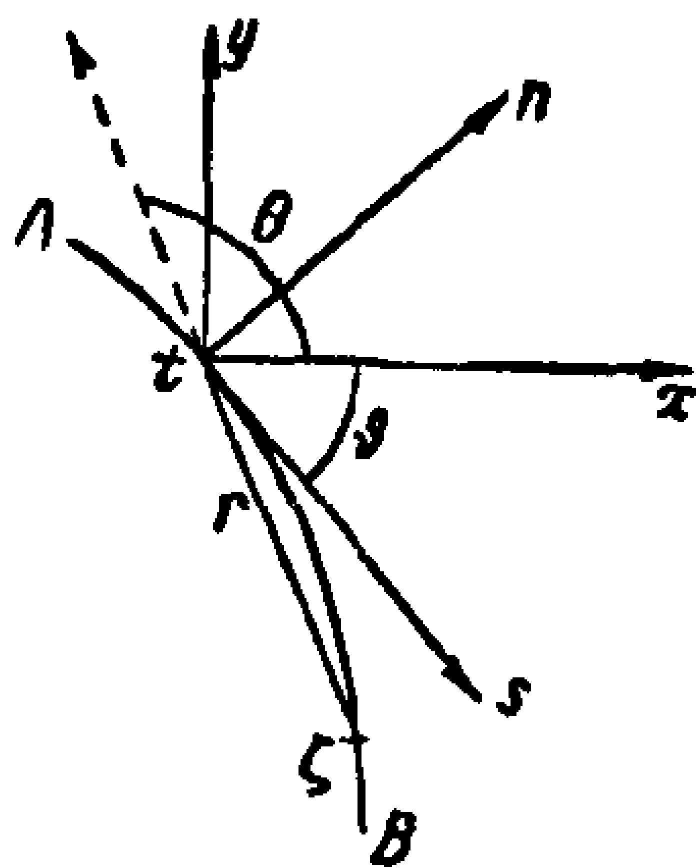


圖 22

§74. 流過已知形狀的弧的流線運動問題 我們試考究關於流過充分平滑的不閉合的弧 AB (圖 22)的流線運動的問題。

這問題可能用 §35 的方法解出,但是這方法在不閉合的境界的情況中引到結構相當複雜的非弗列德和蒙積分方程。所以我們將用另一方法解我們的問題,卽,我們試證示可能引它到某奇性積分方

程。

與在 §35 中所說的不同，我們將假定在無窮遠處流動速度的方向是與 x 軸成有角度的。令在無窮遠處流動速度的分量等於 U 及 V。則速度的複勢 $w(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y)$ 在無窮遠處滿足條件

$$\lim_{z\to\infty}[w'(z)-(U-iV)]=0。\tag{1}$$

我們將假定弧 AB 是固定不動的。則在弧上必須滿足等式［見 §35 的（3）］

$$\psi=C'。\tag{2}$$

我們的問題是在尋求在弧 AB 外面是解析的並滿足條件(1)及(2)的函數 $w(z)$。在這樣的形式中問題確定不出來，所以我們又添一附加的條件：

在弧 AB 的全部上，或者 A 點可能除外，流動速度是有限的❶。

我們試表記

$$w'(z)-(U-iV)=\omega(z)。\tag{3}$$

函數 $\omega(z)$ 是在 AB 外面正則的，並在無窮遠處等於零。我們試求它在 AB 上所滿足的條件。我們試用 t 表記弧 AB 的任意點 C 的複坐標，並用 s 表記弧 AC 的長度。由（2）接着知，在 AB 上 $\frac{\partial\psi}{\partial s}=0$。再者，

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\operatorname{Im}\left(w'(t)\frac{dt}{ds}\right)。$$

我們試用 ϑ 表記在 C 點 AB 的切線與 x 軸間的角度。則 $\frac{dt}{ds}=e^{i\vartheta}$。現在由末兩等式接着得

$$\operatorname{Im}\{\omega(t)e^{i\vartheta}\}=V\cos\vartheta-U\sin\vartheta。\tag{4}$$

我們將尋求形式爲柯西型積分的如下的函數 $\omega(z)$：

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)e^{-i\vartheta}d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)d\sigma}{\zeta-z},\tag{5}$$

❶ 參閱[21]。

其中 $d\sigma=|d\zeta|$ 及 δ 是在 ζ 點 AB 的切線與 x 軸間的角度。我們將假設函數 $T(\zeta)$ 是實數。在(5)中的積分可能解釋爲沿 AB 分佈着的具有密度 $T(\zeta)$ 的渦旋元的和。與此相應，M. A. 拉符鋭契夫叫函數 $T(\zeta)$ 爲"渦旋函數"。

令 z 點趨向弧 AB 的點 t。根據柯西型積分極限值的定理

$$\omega(t)=\pm\frac{1}{2}T(t)e^{-i\theta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)e^{-i\delta}d\zeta}{\zeta-t}。$$

以此代入(4)中，我們得具有未知

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)e^{i(\vartheta-\delta)}d\zeta}{\zeta-t}\right\}=V\cos\vartheta-U\cos\vartheta \qquad (6)$$

的奇性積分方程。方程(6)可能授予另一式樣。我們試用 θ 表記向量 $t-\zeta$ 與 x 軸間所成的角度，而用 r 表記這向量的長度。則 $\zeta-t=-re^{i\theta}$，且從而，

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)e^{i(\vartheta-\delta)}d\zeta}{\zeta-t}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{AB}\frac{T(\zeta)e^{i(\vartheta-\theta)}}{r}d\sigma\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{T(\zeta)\cos(\vartheta-\theta)}{r}d\sigma。$$

現在方程(6)取下式樣

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\cos(\vartheta-\theta)}{r}d\sigma=V\cos\vartheta-U\sin\vartheta。 \qquad (6_1)$$

$\vartheta-\theta$ 的數值是向量 $t-\zeta$ 的方向與在 t 點 AB 的切線間的角度。引入向量 $t-\zeta$ 的方向與在 C 點弧 AB 的法線間的角度 (r,n)，我們有：

$$\cos(\vartheta-\theta)=\frac{\sin(r,n)}{r}。$$

這給出方程(6)的新形式：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\sin(r,n)}{r}d\sigma=V\cos\vartheta-U\sin\vartheta。 \qquad (6_2)$$

方程(6)有無數多個解。它們，代入(5)中，都給出各處有限的，A 及 B 兩點處可以例外，$\omega(z)$（所以，也給出這樣的流動速度）。依照

我們所設的條件,在 B 點的速度必須是有限的。於是 $\omega(z)$ 在 B 點必須是有限的,而為了這必須使 $T(\zeta)$ 在這點變成零。事實上,我們試用 α 及 β 表記 A 及 B 兩點的複坐標。即:

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T_1(\zeta)-T_1(\beta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{T_1(\beta)}{2\pi i}\ln\frac{\beta-z}{\alpha-z};$$

$$T_1(\zeta)=T(\zeta)e^{-i\vartheta}。\qquad (7)$$

可能證明,若 $T(\zeta)$ 是方程(6)的任一解,在(7)中的積分當 $z\to\beta$ 時是連續的❶。但是在這樣的情況中僅當 $T_1(\beta)=0$ 時,即僅當 $T(\beta)=0$ 時, $\omega(z)$ 將在 $z=\beta$ 處是有界的。我們對方程(6)的解也將加予這個條件。

在一般的情況中方程(6)沒有有限形式的解; M. A. 拉符銳契夫在提過的論文[21]中發揮它的近似解的方法。在下面我們給出兩個最簡單情況的準確解,即當 AB 是直線的一段或是圓的弧❷。

(a) 令 AB 是實數軸的 $(-a, a)$ 段。在這情況中 $\vartheta=\delta=0$, ζ 及 t 的數值是實數,方程(6)簡化成

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{T(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta=-V。\qquad (8)$$

我們用§26的公式(26)把方程(8)的解寫成:

$$T(t)=\frac{2V}{\pi\sqrt{t^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\zeta^2-a^2}}{\zeta-t}d\zeta+\frac{C}{\sqrt{a^2-t^2}}。$$

在這公式中的積分已在§68中計算過:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\zeta^2-a^2}}{\zeta-t}d\zeta=-it,$$

所以,

$$T(t)=\frac{2Vt-C'}{\sqrt{a^2-t^2}};\qquad C'=-iC。\qquad (9)$$

❶ 這證明可在 M. A. 拉符銳契夫的論文[21]中找到。

❷ 在論文[22]中 M. A. 拉符銳契夫, Я. И. 塞柯耳眞考威及 B. M. 雪培雷夫建立流過雙弧的問題的奇性方程組,並利用廣義的施瓦而茨交替法來解它。

在 $t=a$ 點 $T(t)$ 必須變爲零。由此我們來到 $C'=2aV$，及

$$T(t)=-2V\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}。\tag{10}$$

現在

$$\omega(z)=-\frac{V}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{dt}{t-z}。\tag{11}$$

爲了計算在(11)中的積分，我們令

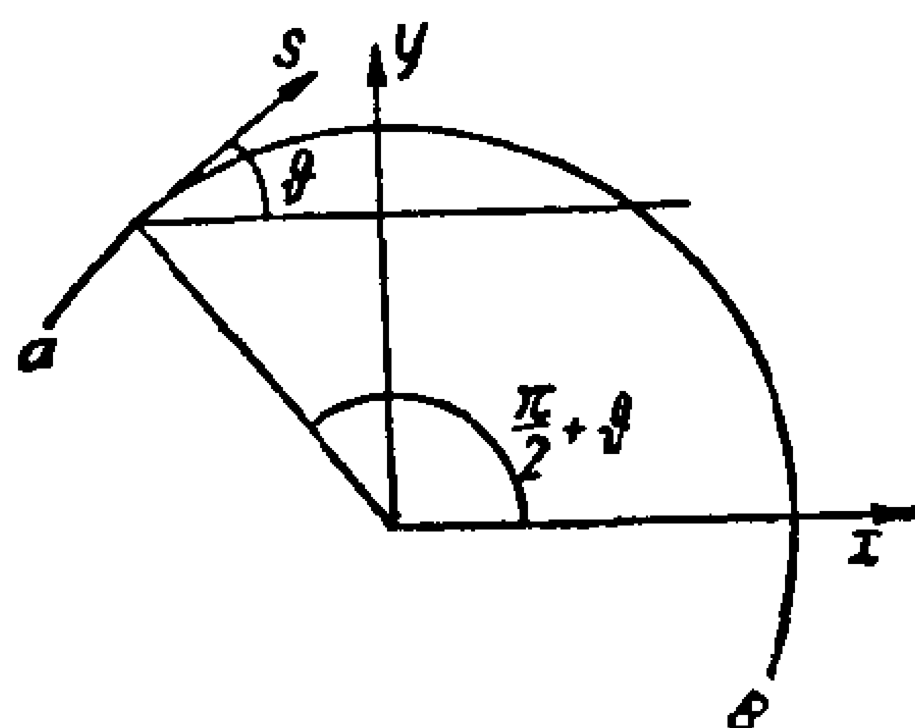


圖　23

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{dt}{t-z},$$

其中 C 是圖 19 的境界。我們有：

$$\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}=\frac{a-t}{i\sqrt{t^2-a^2}}。$$

在 $T(t)$ 的計算中我們已選擇根的那個數值，它在無窮遠處有下展開式

$$\sqrt{t^2-a^2}=t-\frac{a^2}{2t}+\cdots,$$

以此代入前面的等式，我們求得

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}=i。$$

函數 $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$ 是在 C 的外面正則的，並在無窮遠處等於 i。由此接着得

$$\Omega(z)=\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}-i。$$

我們試以$(-a,a)$段往返兩次代替境界 C。考慮到在這段的不同邊 $\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}$ 有不同的正負號，我們有：

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{dt}{t-z}=\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}-i$$

及

$$\omega(z)=iV-V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}。\tag{12}$$

最後

$$w'(z)=U-V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}。\tag{13}$$

(6) 現在令 AB 是圓周 $|\zeta|=1$ 的弧。我們用 α 及 β 表記弧的兩端的複坐標。我們試令 x 軸的方向與在無窮遠處的流動速度平行，這樣就 $V=0$。由圖 23 看出，$\arg t=\vartheta+\frac{\pi}{2}$ 且從而，$t=e^{i\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}=ie^{i\vartheta}$。完全同樣地，$\zeta=ie^{i\vartheta}$。

我們試把(6)中的積分引到最簡單的式樣。

首先，$e^{i(\vartheta-\delta)}=\frac{t}{\zeta}$。再者，

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{T(\zeta)t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\operatorname{Re}\left(\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right)。$$

在另一方面，

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right)=\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}+\frac{\bar{t}\,d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta}-\bar{z})}。$$

因為在圓周上 $\bar{t}=\frac{1}{t}$ 及 $\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$，故作簡單計算後我們得：

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{t\,d\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right)=\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}。$$

以所有這些代入(6)中，我們得方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}=2\sin\vartheta。$$

但是 $$2\sin\vartheta=\frac{1}{i}\left(e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}\right)=-\left(t+\frac{1}{t}\right),$$

方程的最後式樣將是

$$\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}=-\left(t+\frac{1}{t}\right)。\tag{14}$$

我們試開始走向這方程的解出。我們試考究積分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}。\tag{15}$$

顯然 $F(z)$ 是在沿弧(α,β)截過的全部平面上正則的。在這裏

$$F(\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=A。$$

再者，因爲核

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{2\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{d\zeta}{\zeta}$$

與柯西核僅相差一常數的乘數及一正則項，故，容易看出，關於柯西型積分的極限的定理對積分(15)也是正確的:

$$\left.\begin{aligned}F_i(t)&=T(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta},\\ F_e(t)&=-T(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{d\zeta}{\zeta}。\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

以此代入(14)中，我們得:

$$F_i(t)+F_e(t)=-2i\left(t+\frac{1}{t}\right)。\tag{17}$$

我們令

$$F(z)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}=\Phi(z)。$$

無窮遠點是 $\Phi(z)$ 的一級極點。除去這點後，函數 $\Phi(z)$ 在截過的平面中是正則的。我們試選擇根的那個數值，它在無窮遠處的展開式是由 $+z$ 項開始的。則可能寫

$$\Phi(z)=Az+\Phi_0(z),$$

其中 $\Phi_0(z)$ 是在 $z=\infty$ 時正則的。在(17)中代替 $F(z)$ 引入 $\Phi(z)$ 的式子，並考慮到在弧 (α,β) 的不同邊根有不同的正負號，我們把方程(17)變到下式樣

$$\Phi_i(t)-\Phi_e(t)=$$
$$=-2i\left(t+\frac{1}{t}\right)\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}。$$

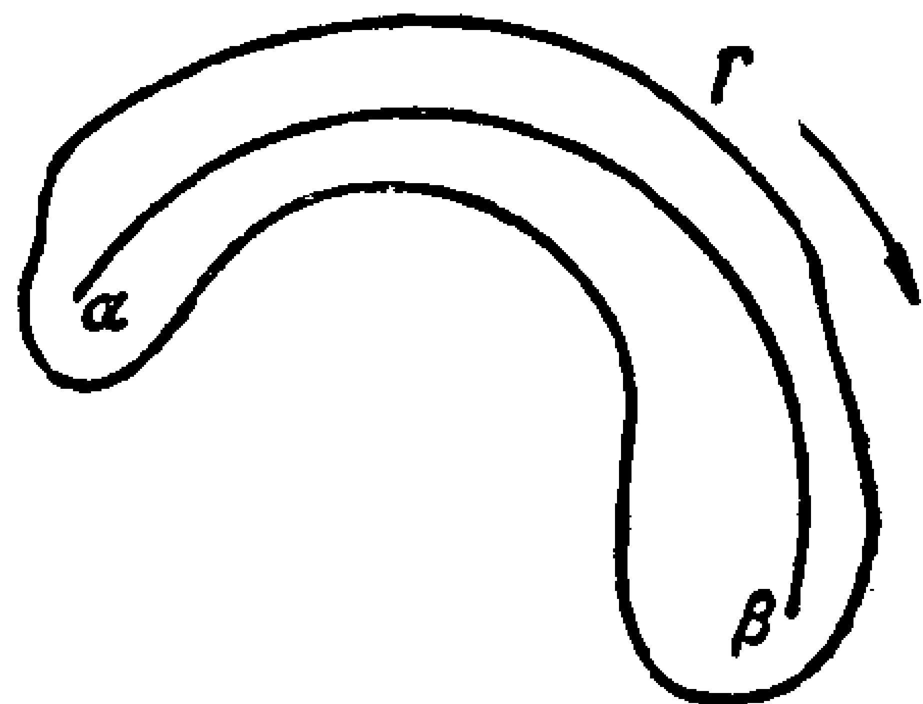


圖　24

但是

$$\Phi_i(t)=At+\Phi_{0i}(t),$$
$$\Phi_e(t)=At+\Phi_{0e}(t)。$$

由此

$$\Phi_{0i}(t)-\Phi_{0e}(t)=-2i\left(t+\frac{1}{t}\right)\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}。\tag{18}$$

這方程的特解是

$$\Phi_0(z)=-\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}。\tag{19}$$

在 $z=\infty$ 處(19)式等於零。函數 $\Phi_0(z)$ 既然僅是在無窮遠處正則的，它在 $z=\infty$ 處能令等於某常數。若在(19)中加上一隨意常數，就得到方程(17)的通解：

$$\Phi_0(z)=-\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}+C。$$

爲了計算最末積分，我們試考究積分

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}。$$

境界 Γ 已在圖 24 上表出；點 z 的位置是在 Γ 的外面。在 $\zeta=\infty$ 點的附近，根號項分解成下式樣的勞潤級數：

$$\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}=\zeta-\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8\zeta}+\cdots$$

在 $\Omega(z)$ 式子中的積分分成兩個。第一個我們試用下式樣表出

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\{\zeta\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}-\zeta^2+\frac{(\alpha+\beta)\zeta}{2}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta-z}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\zeta^2-\frac{(\alpha+\beta)\zeta}{2}-\frac{(\alpha+\beta)^2}{8}\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z}。$$

在第二個積分中被積函數是在 Γ 的裏面正則的，因之積分等於零。第一個積分是柯西積分。這樣

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\zeta\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$=z\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}-z^2+\frac{(\alpha+\beta)z}{2}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}。$$

再者，在無窮遠處函數 $\dfrac{\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}}{\zeta(\zeta-z)}$ 是正則的，且有殘數 -1。在

Γ 的外面有限距離處它在 $\zeta=0$ 及 $\zeta=z$ 處是具有殘數 $-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}$ 及 $\frac{1}{2}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$ 的極點。考慮到依順時針方向繞 Γ，並應用殘數定理，我們求得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta}\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{z}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}-1。$$

合起來，我們得

$$\Omega(z)=\left(z+\frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}-z^2+\frac{(\alpha+\beta)z}{2}+$$
$$+\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}-1-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}。$$

境界 Γ 可能用 (α, β) 段往返的兩次來代替。這給我們

$$\Phi_0(z)=-i\left(z+\frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}+$$
$$+i\left(z^2-\frac{(\alpha+\beta)z}{2}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}+1+\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) \qquad (20)$$

且從而，

$$\Phi(z)=-i\left(z+\frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}+$$
$$+i\left(z^2-\frac{\alpha+\beta-2iA}{2}z-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}+1+\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right)。\qquad (21)$$

由此

$$F(z)=-i\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}\left(z^2-\frac{\alpha+\beta-2iA}{2}z-\right.$$
$$\left.-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}+1+\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right)-\frac{iC}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}。\qquad (32)$$

現在由公式(16)接着得

$$T(t)=\frac{1}{2}[F_i(t)-F_e(t)]=\frac{i}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\left[t^2-\frac{\alpha+\beta-2iA}{2}t-\right.$$
$$\left.-\frac{(\alpha-\beta)^2}{8}+1-C+\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right]。\qquad (23)$$

常數 C 是由條件 $T(\beta)=0$ 確定，而常數 A 是由等式

$$A=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

確定。現在

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{T(\zeta)\,e^{-i\delta}\,d\zeta}{\zeta-z}+U=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta\,(\zeta-z)}+U。\qquad(24)$$

由柯西型積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$$

進行，其中 Γ 是圖 24 的境界，積分 (24) 是容易計算的。我們將不給出 $w(z)$ 的最後式子，因爲它太繁長了。

文 獻

A. 積分方程理論課程

1. Г.Виарда. 積分方程,譯自德文。ГТТИ, 1933。

2. Э. Гурса. 數學解析課程,第三卷,第二篇,譯自法文。ГТТИ, 1934。

3. Н. М. Гюнтер. 數學物理的基礎,第一篇,積分方程。Кубуч 版。Л-д, 1931。

4. Р. Курант 及 Д. Гильберт. 數學物理方法,第一卷,譯自德文。ГТТИ, 1933; 特別是第三章。

5. У. Ловитт. 積分方程,譯自英文。ГТТИ, 1933。

6. Г. М. Мюнтц 積分方程。ГТТИ, 1934。

7. И. И. Привалов. 積分方程,第二版。ГТТИ, 1937。

8. В. И. Смирнов. 高等數學課程,第四卷。ГТТИ, 1941。

8a. И. Г. Петровский. 積分方程理論講座。Гостехиздат, 1948。

B. 關於積分方程的應用及各種問題的文獻

9. И. В. Ананьев. 關於具有聚集質量的翼的固有振動的問題的解的積分方程方法。ЦАГИ 工作報告, № 348, 1938。

10. И. Н. Векуа. 彈性理論的固定平面問題方程的一般解的複數表示。АН СССР 報告,第十六卷, № 3, 1937。

11. А. Я. Горгидзе. 逐次追近方法在彈性理論的平面問題中的應用。АН СССР 報告,第四卷, № 5—6, 1934。

12. **N. Günther**. 勢理論及其數學物理的基本問題中的應用。巴黎, Gauthier-Villars, 1934。

13. F. H. van-den Dungen. 振動技術課程。Bruxelles, 1926。

14. Н. В. Зволинский. 積分方程方法在柱體套的穩定剛性的一個問題上的應用。ЦАГИ 工作報告, № 320, 1937。

15. **T. Caaleman**. (a)關於線性積分方程理論。Math. Zeitschrift,第9卷, H. 3/4, 1921。

(b)關於某些積分方程的解。Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. 第16卷, 1922。

16. **А. И. Комай.** 具有聚集荷重的翼的連合振動。ЦАГИ 工作報告, № 472,1940。

17. **Н. Е. Кочин.** (a)關於在不可壓縮的重液體的表面上微曲境界的平面問題。ЦАГИ 工作報告, № 356, 1938。

(b) 關於浸沒在液體中的物體的驅動阻力及浮力,驅動阻力理論會議的工作報告。ЦАГИ 版, 1937。

18. **G. Krall.** Sulla configuratione d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile. Annali di matematica pura e applicata, s. IV, t. IV, 1927。

19. **М. Г. Крейн** 及 **Я. Л. Нудельман.** Про мінімаксимальні властивості вузлів обертонів вібруючого стрижня. Труди Одеського Держ. Универс., Матем., т. II, 1938。

20. **В. Д. Купрадзе.** (a)在衍射理論中的積分方程方法。Матем. сборник, 第41卷, № 4,第 561—581 頁, 1934。

(б) 在非均匀的介質中電磁波的傳播。Тбил. 工作報告。Мат. ин-та, 第一卷,第 115—123 頁, 1937。

(c) 在平面非均匀場中電磁振動的研究。АН СССР 報告,第16卷, № 3, 1937。

(d) 在非均匀平面介質中電磁波傳播的問題。Compositio Mathematica,第6卷,第2期,第 228—234 頁, 1938。

(e) 分解理論在勢理論的邊界問題上的某些新的應用。АН СССР 報告, 第 23 卷, № 1, 1939。

21. **М. А. Лаврентьев.** 關於流過已知形狀的弧的流動的形成。ЦАГИ 工作報告, № 118, 1932。

22. **М. А. Лаврентьев, Я. И. Секерж-Зенькович** 及 **В. М. Шепелев.** 關於雙翼飛機機身翼的理論。ЦАГИ 工作報告, № 153, 1935。

23. **G. Lauricella.** 關於彈性嵌入金屬板的平衡方程的積分法。Acta Mathem. 第32卷,第 201—256 頁, 1909。

24. **Ц. О. Левйна** 及 **С. Г. Михлин.** 關於在兩室間的支柱中應力的計算問題。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告。 № 94, 1940。

25. **Ц. О. Левйна.** 在兩室間的支柱中應力的補充研究。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 108, 1941。

26. **Л. Г. Магнарадзе.** (a) 具有尖點的境界的彈性平面理論的基本問題。Тбил. Матем. ин-та 工作報告,第三卷,第 43—75 頁, 1938。

(b) 數學物理中具有尖線的表面的某些邊界問題。Тбил. Мат. ин-та 工作報告,第七卷,第 23—45 頁, 1939。

27. **С. Г. Михлин.** (a) 具有某些閉合邊界的區域的狄銳希勒問題。АН СССР 報告, № 7, 第 2—7 頁, 1934。

(b) 關於具有橢圓切洞的半平面中應力的分佈。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 29, 1934。

(c) 逐次迫近方法應用到雙調和的問題中。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 39, 1934。

(d) 彈性理論的平面問題。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 65, 1935。

(e) 非均勻介質的彈性理論的平面問題。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 66, 1935。

(f) 在不各向同性的介質中的平面形變。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 76, 1936。

(g) 在奇性積分方程理論中的等價問題。Матем. сборн., 第3卷(45), № 1, 第 121—141 頁, 1938。

(h) 關於奇性積分方程的一種。АН СССР 報告,第24卷, № 4, 1939。

(i) 波方程的某些初級的邊界問題。Сейсм. ин-та АН СССР, № 101, 1940。

(j) 波方程的基本邊界問題。АН СССР 報告,第29卷, № 4, 1940。

(k) 拉卜拉斯變換在波方程的邊界問題上的應用。АН СССР 報告, 第31卷, № 4, 1941。

(l) 關於煤層上岩石中的應力。Изв. ОТН АН СССР, № 7—8, 1942。

(m) 柱形波方程的邊界問題的近似解。Изв. ОТН АН СССР. № 11—12, 1942。

(n) 關於弗列德和蒙級數的收斂。АН СССР 報告,第62卷, № 9, 1944。

(o) 關於兩彈性半平面接連的問題。Прикл. Матем. и мех. 第9卷, 1945, 第179—184 頁。

(p) 奇性積分方程。數學科學的進展,第3卷,第3(25)期, 1945。

28. Н. И. Мусхелишвили. (a) 彈性理論的某些問題。Изд. АН СССР, 1935。

(b) 解彈性平面理論的基本邊界問題的新一般方法。АН СССР 報告, 第3卷, № 1, 1934。

(c) 彈性平面理論的新積分方程的研究。АН СССР 報告,第3卷, № 2, 1934。

(d) 柯西型積分在一種奇性積分方程中的應用。Тбил. Мат. ин-та 工作報告, 第10卷,第 1—43 頁, 1941。

(e) 具有柯西型核的奇性積分方程組。АН 交粑亞 ССР 報告,第3卷, № 10, 第987—994 頁, 1942。

(f) 奇性積分方程。Гостехиздат, 1946。

29. Н. И. Мусхелишвили 及 Д. З. Авазашвили. 關於對數勢理論的基本境界問題的解。Тбил. Матем. ин-та 工作報告,第7卷, 第 1—13 頁, 1940。

30. Н. И. Мусхелишвили 及 Д. А. Квеселава. 在不閉合的境界上具有柯西型核的

奇性積分方程。Тбил. Мат. ин-та 工作報告,第9卷,第 141—172 頁, 1942。

31. Я. Л. Кудельман. До теорії стійкості простолинійного стрижня。Труди Одеського Держ. Универс., Матем., т. II, 1938。

32. И. РАДОН. 關於對數勢的邊界問題。數學科學的進展,第1卷,第3—4期 1946。

33. Г. Н. Савин. 具有一系列無限多截洞的彈性平面中的應力。АН СССР 報告, 第23卷, 第 515—519 頁, 1939。

34. С. Л. Соболев. 在彈性理論中的施筐而茨交替法。АН СССР 報告,第4(13) 卷, № 6,第 236—238 頁, 1936。

35. E. Treftz. 直棒折斷的一般理論。ZAMM,第3卷,第4期,第273 頁, 1923。

36. E. Schwerin. 關於截面非常數的棒的橫向振動。Verh. d. 2. 技術力學的國際會議, Zürich, 1926, 第138—145 頁。

37. Д. И. Шерман. (a) 具有橢圓截洞的半平面中應力的確定。Сейсм. Ин-та АН СССР 工作報告, № 58, 1935。

(b) 關於在複連通區域的彈性理論中解靜力學的平面問題的一個方法。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 54, 1935。

(c) 具有軸對稱的彈性理論靜力學問題的某些情況。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 71, 1935。

(d) 彈性理論的靜力學平面問題。Тбил. Матем. ин-та 工作報告, 第二卷, 第 163—225 頁, 1937。

(e) 關於彈性理論的平面問題的積分方程的特徵值的分佈。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 86, 1938。

(f) 不均勻介質的彈性理論的靜力學平面問題。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 86, 1938。

(g) 不各向同性的介質的彈性理論平面問題。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 86, 1938。

(h) 具有混合邊界條件的彈性理論平面問題。Сейсм. ин-та АН СССР 工作報告, № 88, 1938。

(i) 關於彈性理論的一個問題。АН СССР 報告,第27卷, № 9, 1940。

(j) 關於已知外力時彈性理論的平面靜力學問題的解。АН СССР 報告, 第28卷, № 1, 1940。

(k) 平面複連通區域的靜力學彈性理論的混合問題。АН СССР 報告,第28卷, № 1, 1940。

(l) 關於橢圓板中的應力。АН СССР 報告,第31卷, № 4, 1941。

(m) 不各向同性的介質的彈性理論平面問題的新解。АН СССР 報告, 第32卷, № 5,

1941。

(n) 關於彈性理論的一個混合問題。Прикл. Матем. и Мех, 第7卷, № 6, 1943。

(o) 關於彈性波衍射的問題。АН СССР 報告,第68卷, № 9, 1945。

38. **W. Sternberg.** 光的電磁理論中積分方程的應用。Compositio Mathematica, 第3卷,第 254—257 頁, 1936。

39. **В. И. Довнорович.** 在彈性半空間上剛堅的衝體的壓力。論文。Ленинградский Гос. Университет。

40. **С. Зоремба.** 有關拉卜拉斯方程的一個混合問題。數學科學的進展,第一卷,第3—4(13—14)期, 1946。

41. **И. А. Ицкович.** 關於弗列德和蒙級數。АН СССР 報告, 第9卷, № 3, 1948。

42. **Л. В. Канторович** 及 **В. И. Крылов.** 高等解析的近似方法。ГТТИ, 1941。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝积分方程及其应用
作者＝米哈林
页数＝３４２
ＳＳ号＝１０２３７０１３
出版日期＝１９５５年０８月第１版